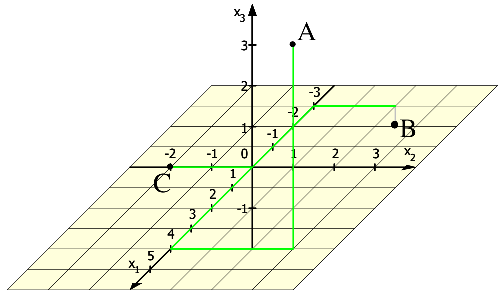
1. Vorwissen

1.1 Punkte (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $A(4|3|5)$

Vom **Ursprung** geht man
4 Einheiten nach vorne, 3 nach rechts und 5 Einheiten nach oben.

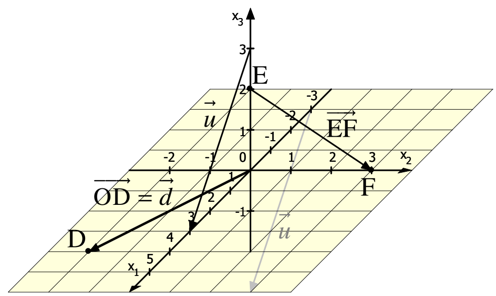
$B(-3|2|-0{,}5)$; $C(0|-2|0)$



1.2 Vektoren (im $\mathbb{R}^3$)

Beispiel: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Von einem beliebigen **Anfangspunkt** geht man
3 Einheiten nach vorne und
3 Einheiten nach unten.



Bemerkungen

- **Ortsvektor** eines Punktes: Zeigt vom Ursprung auf den Punkt (also auf einen „Ort“).

Beispiel: $D(4|-2|0)$ und $\overrightarrow{OD} = \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- **Verbindungsvektor** zwischen 2 Punkten:

Beispiel: $E(0|0|2)$ und $F(0|3|0) \rightarrow \overrightarrow{EF} = \vec{f} - \vec{e} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 3-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

„Verbindungsvektor $=$ Endpunkt $-$ Startpunkt“

- **Spezielle Vektoren**

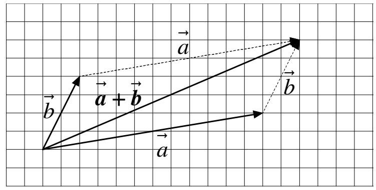
Nullvektor $\vec{O} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Einheitsvektoren: $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1.3 Rechnen mit Vektoren

1. Addition und Subtraktion von Vektoren

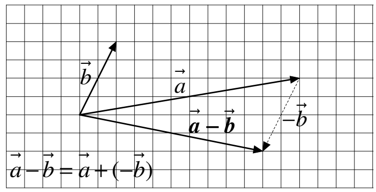
$$\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\a_3+b_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{(Beispiel)}$$



$$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\\a_3-b_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix} \quad \text{(Beispiel)}$$



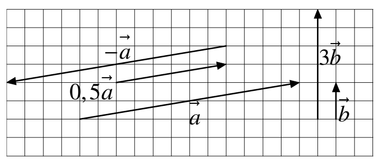
Hinweis: Grafisch wird bei der Subtraktion der Gegenvektor $-\vec{b}$ addiert.

2. Länge (Betrag) eines Vektors

$$\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}};\ \text{Beispiel: } \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}\rightarrow |\vec{a}|=\sqrt{3^2+0^2+(-4)^2}=\sqrt{25}=5\text{ LE}$$

3. S(kalare) – Multiplikation (Zahl · Vektor)

$$k\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}k\cdot a_1\\k\cdot a_2\\k\cdot a_3\end{pmatrix}(k\in\mathbb{R}) \quad \text{Beispiel: } 2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\0\\-8\end{pmatrix}$$



Bemerkungen

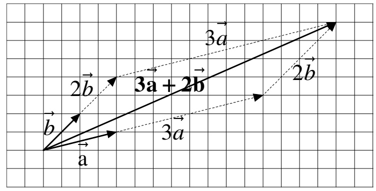
- Der Vektor $k\cdot\vec{a}$ hat die $|k|$-fache Länge von $\vec{a}$ und ist parallel zu $\vec{a}$.
- Der **Gegenvektor** $-\vec{a}$ ist parallel und besitzt die gleiche Länge wie $\vec{a}$, ist jedoch entgegengesetzt gerichtet.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix};\ -\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$

- Ein **Einheitsvektor** ist ein Vektor, dessen **Länge 1** ist. Teilt man einen gegebenen Vektor durch seine Länge (Betrag), erhält man den zugehörigen Einheitsvektor.

Beispiel: $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ hat die Länge $|\vec{a}|=5$; Einheitsvektor: $\overrightarrow{a_0}=\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,6\\0\\-0,8\end{pmatrix}$

4. Linearkombination von Vektoren

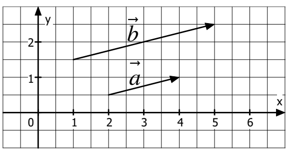


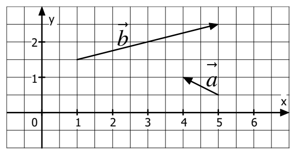
$\boldsymbol{k}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}+\boldsymbol{l}\cdot\vec{\boldsymbol{b}}$ (mit $k,\ l\in\mathbb{R}$)

ist eine Summe von Vielfachen von Vektoren. Man bildet auf diese Art „neue“ Vektoren.

5. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit

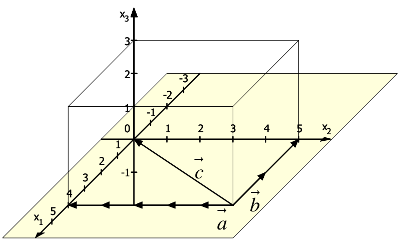
2 Vektoren im $\mathbb{R}^2$

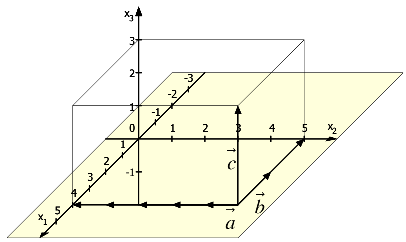
<table>
<tr><th>$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear abhängig</th><th>$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind linear unabhängig</th></tr>
<tr><td>

Beispiel: $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}2\\0,5\end{pmatrix}$
Es gilt: $\vec{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{k}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$ (mit $k\in\mathbb{R}$)
Der Vektor $\vec{b}$ ist ein (skalares) Vielfaches des Vektors $\vec{a}$. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel.</td>
<td>

Beispiel: $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\neq k\cdot\begin{pmatrix}-1\\0,5\end{pmatrix}$
Es gilt: $\vec{\boldsymbol{b}}\neq\boldsymbol{k}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}$ (mit $k\in\mathbb{R}$)
$\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht parallel.</td></tr>
</table>

3 Vektoren im $\mathbb{R}^3$

<table>
<tr><th>$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear abhängig</th><th>$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind linear unabhängig</th></tr>
<tr><td>

Beispiel: $\vec{c}=5\vec{a}+2\vec{b}$
Es gilt: $\vec{c}=k\cdot\vec{a}+l\cdot\vec{b}$ (mit $k,\ l\in\mathbb{R}$)
Der Vektor $\vec{c}$ lässt sich als Linear -kombination aus $\vec{a}$ und $\vec{b}$ darstellen.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ liegen in einer Ebene.</td>
<td>

Kein Vektor lässt sich als Linear-kombination aus den beiden anderen Vektoren darstellen.
$\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ spannen einen Raum auf.</td></tr>
</table>

Bedeutung der linearen Unabhängigkeit

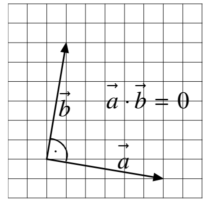
- Durch eine Linearkombination aus 3 linear unabhängigen Vektoren kann jeder beliebige Vektor im $\mathbb{R}^3$ dargestellt werden.
- 2 linear unabhängige Vektoren spannen im $\mathbb{R}^3$ eine Ebene auf.

6. Skalarprodukt (Vektor · Vektor)

Das Skalarprodukt zweier Vektoren **ergibt eine reelle Zahl**.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} = \boldsymbol{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3} \qquad \text{Beispiel: } \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 = 5$$

Das Skalarprodukt wird vor allem dazu verwendet, um zu untersuchen, ob zwei Vektoren **senkrecht (orthogonal)** aufeinander stehen. In diesem Fall ergibt ihr **Skalarprodukt 0**.



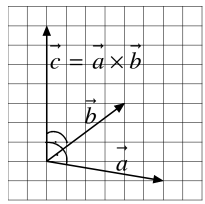
Beispiel: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 9 + (-4) \cdot 2 = 0$

Somit stehen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht aufeinander.

7. Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt (Vektor × Vektor)

Hinweis: Das Vektorprodukt steht nicht verpflichtend im Bildungsplan. Es kann jedoch oft eingesetzt werden und erspart dann erheblich Rechenaufwand.

Das Vektorprodukt zweier Vektoren **ergibt einen Vektor**, der auf **beiden Vektoren senkrecht** steht.



$$\vec{\boldsymbol{c}} = \vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_1} \\ \boldsymbol{a_2} \\ \boldsymbol{a_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boldsymbol{b_1} \\ \boldsymbol{b_2} \\ \boldsymbol{b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2} \\ \boldsymbol{a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3} \\ \boldsymbol{a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1} \end{pmatrix}$$

(Hilfsschema)

$$\begin{pmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{b_1} \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \cancel{a_3} & \cancel{b_3} \end{pmatrix}$$

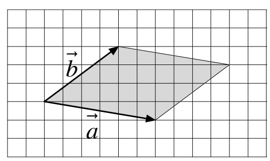
Beispiel:

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1) \cdot 0 & - \; 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-3) & - \; 2 \cdot 0 \\ 2 \cdot 2 & - \; (-1) \cdot (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{2} & \cancel{-3} \\ -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 2 & -3 \\ -1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Anwendungen des Vektorproduktes

Berechnung des Flächeninhaltes des durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten



- **Parallelogramms:** $\mathbf{A} = \left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right|$
- **Dreiecks:** $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\left|\vec{\boldsymbol{a}} \times \vec{\boldsymbol{b}}\right|$