2.2 Binomialverteilung und kumulierte Binomialverteilung

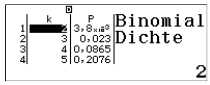
Beispiel: Ein Basketballspieler trifft erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal. Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Treffer an.

Die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt, kann mit Hilfe der Bernoulliformel (mit $n = 8$ und $p = 0,75$) berechnet werden.
Somit ist die Zufallsvariable X binomial verteilt.

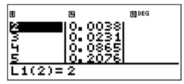
1. Die Binomialverteilung (genau k Treffer; $P(X = k)$)

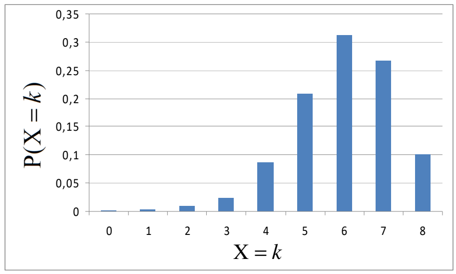
eine „Liste“, in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **zugehörige Wahrscheinlichkeit** steht.

CASIO



TI





Beispiel: $P(X = 4) \approx 0,0865$

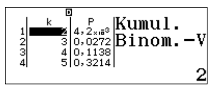
Die Wahrscheinlichkeit für **genau** 4 Treffer beträgt ca. 8,65 %.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Berechnung mit Bernoulliformel:} \\ P(X = 4) = \binom{8}{4} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^4 \approx 0,0865 \end{array} \right)$$

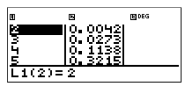
2. Die kumulierte Binomialverteilung (höchstens k Treffer; $P(X \leq k)$)

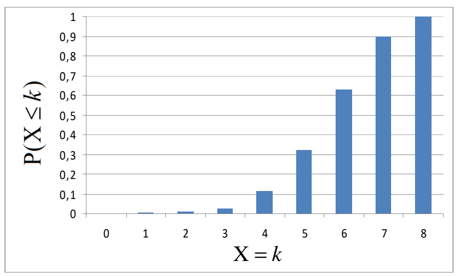
eine „Liste“, in welcher für jeden möglichen Wert der Zufallsvariablen die **Wahrscheinlichkeit** steht, dass **dieser oder ein geringerer Wert als dieser** (**höchstens** dieser) angenommen wird.

CASIO



TI





Beispiel: $P(X \leq 4) \approx 0,1138$

Die Wahrscheinlichkeit für 0 bis 4 Treffer (**höchstens** 4 Treffer) beträgt ca. 11,38 %.

$$\left(\begin{array}{l} \text{Berechnung:} \\ P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + \ldots + P(X = 4) \end{array} \right)$$

3. Wahrscheinlichkeit für mindestens k Treffer $P(X \geq k)$

Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft der Spieler 4 bis 8 Mal (also **mindestens** 4 Mal)?

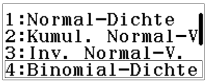
Vorgehen mithilfe des **Gegenereignisses** „3 oder weniger Treffer (höchst. 3 Treffer)“ und der **kumulierten Verteilung**:

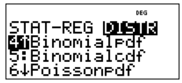
$$P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) \approx 1 - 0,0273 = 0,9727$$

Eingabe in den Taschenrechner (WTR)

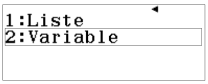
1. Die Binomialverteilung (genau k Treffer; $P(X = k)$)

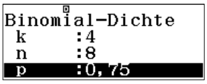
CASIO FX-87DE X	TI-30X Plus MultiView

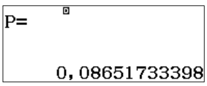


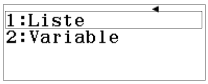


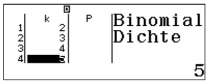
Einzelwert	Liste	Einzelwert	Liste

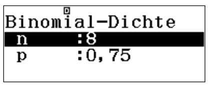


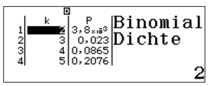


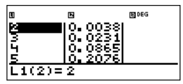






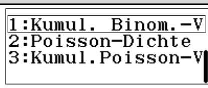




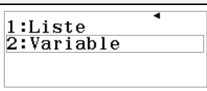


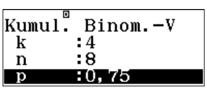
2. Die kumulierte Binomialverteilung (höchstens k Treffer; $P(X \leq k)$)

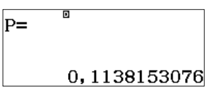
CASIO FX-87DE X	TI-30X Plus MultiView

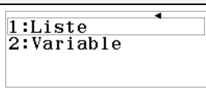


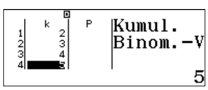
Einzelwert	Liste	Einzelwert	Liste

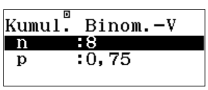


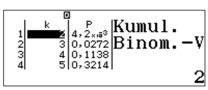


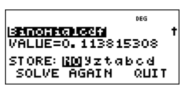


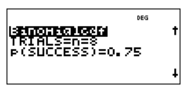


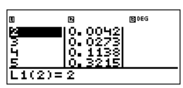












2.3 Aufgabentypen

1. Aufgabentyp („gesucht: Gesamtwahrscheinlichkeit (P)“)

Beispiel: Eine faire Münze wird 8 Mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit …

a) ... für **genau 3** Mal „Zahl“?

geg. $n=8$; $p=0,5$; $k=3$
ges. P

Binomialverteilung (BV)
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=0,2188$

b) ... für **höchstens** 3 Mal „Zahl“?

geg. $n=8$; $p=0,5$; $k\le 3$
ges. P

kumulierte BV
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 3)=0,3633$

c) ... für **mindestens** 3 Mal „Zahl“?

geg. $n=8$; $p=0,5$; $k\ge 3$
ges. P

kumulierte BV

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 3)=1-\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 2)=1-0,1445=0,8555$$

d) ... für **mindestens** 2 Mal **und höchstens** 5 Mal „Zahl“?

kumulierte BV : $\mathrm{P}(2\le \mathrm{X}\le 5)=\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 5)-\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 1)\approx 0,8555-0,0352\approx 0,8203$

2. Aufgabentyp („gesucht: Trefferanzahl (*k*)“)

Beispiel: Eine faire Münze wird 8 Mal geworfen. Wie oft muss man …

a) … **(genau**) „Zahl“ | **b)** … **höchstens** „Zahl“ | **c)** … **mindestens** „Zahl“

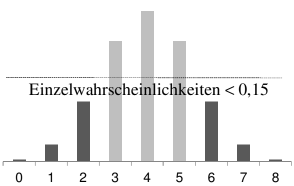
erhalten, wenn die Wahrscheinlichkeit hierfür weniger als 15 % betragen soll?

a)

gegeben: $n=8$; $p=0,5$
Bedingung: $\mathrm{P}(\mathrm{X}=k)<0,15$
gesucht: k

BV
(Liste für mehrere k-Werte)

$\mathrm{P}(\mathrm{X}=0)=0,0039 \leftarrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=1)=0,0312 \leftarrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=2)=0,1093 \leftarrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=3)=0,2187$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=4)=0,2734$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=5)=0,2187$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=6)=0,1093 \leftarrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=7)=0,0312 \leftarrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}=8)=0,0039 \leftarrow$



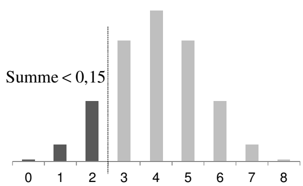
A: 0, 1, 2, 6, 7 oder 8 Mal.

b)

gegeben: $n=8$; $p=0,5$
Bedingung: $\mathrm{P}(\mathrm{X}\le k)<0,15$
gesucht: k

kumulierte BV
(Liste für mehrere k-Werte)

$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 1)=0,0352$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 2)=0,1445 \uparrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 3)=0,3633$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 4)=0,6367$



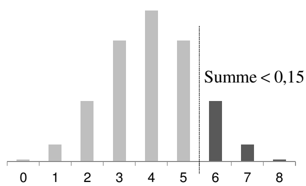
A: 2 Mal oder weniger.

c)

gegeben: $n=8$; $p=0,5$
Bedingung: $\mathrm{P}(\mathrm{X}\ge k)<0,15$
gesucht: k

kumulierte BV
(Liste für mehrere k-Werte; Gegenereignis)

$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 3)=0,3633 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 4)=0,6367$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 4)=0,6367 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 5)=0,3633$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 5)=0,8555 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 6)=0,1445 \downarrow$
$\mathrm{P}(\mathrm{X}\le 6)=0,9648 \Rightarrow \mathrm{P}(\mathrm{X}\ge 7)=0,0352$



A: 6 Mal oder mehr.

3. Aufgabentyp („gesucht: Durchführungshäufigkeit (n)“)

Beispiel: Wie oft muss eine faire Münze geworfen werden, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 25 % ...

a) … **genau** 3 Mal „Zahl“ erhalten möchte?

gegeben: $p = 0,5$; $k = 3$
Bedingung: $\mathrm{P} > 0,25$
gesucht: n

BV
(n-Werte probieren)

$n = 4$; $\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,25$
$n = 5$; $\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,3125$ $\downarrow$
$n = 6$; $\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,3125$
$n = 7$; $\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,2734$ $\uparrow$
$n = 8$; $\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,2188$

A: 5, 6 oder 7 Mal.

b) … **höchstens** 3 Mal „Zahl“ erhalten möchte?

gegeben: $p = 0,5$; $k \le 3$
Bedingung: $\mathrm{P} > 0,25$
gesucht: n

kumulierte BV
(n-Werte probieren)

$n = 8$; $\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,3633$
$n = 9$; $\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,2539$ $\uparrow$
$n = 10$; $\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,1719$
$n = 11$; $\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,1133$

A: 9 Mal oder weniger.

c) … **mindestens** 3 Mal „Zahl“ erhalten möchte?

gegeben: $p = 0,5$; $k \ge 3$
Bedingung: $\mathrm{P} > 0,25$
gesucht: n

kumulierte BV
(n-Werte probieren;
$\mathrm{P}(X \le 2) \le 0,75 \Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) > 0,25$)

$n = 3$;
$\mathrm{P}(X \le 2) = 0,875 \Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) = 0,125$
$n = 4$; $\downarrow$
$\mathrm{P}(X \le 2) = 0,6875 \Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) = 0,3125$
$n = 5$;
$\mathrm{P}(X \le 2) = 0,5 \Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) = 0,5$

A: 4 Mal oder mehr.

4. Aufgabentyp („gesucht: Trefferwahrscheinlichkeit (p)“)

Beispiel: Eine verbeulte Münze wird 8 Mal geworfen. Die Wahrscheinlichkeit für „Zahl“ beträgt entweder p=0,2 oder p=0,4 oder p=0,6. Welche Werte für p können stimmen, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 25 % ...

a) … **genau** 3 Mal „Zahl“ erhalten möchte?

gegeben: $n = 8$; $k = 3$
Bedingung: $\mathrm{P} > 0,25$
gesucht: p

BV
(geg. p-Werte probieren)

$p = 0,2$;
$\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,1468 < 0,25$
$p = 0,4$;
$\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,2787 > 0,25$
$p = 0,6$;
$\mathrm{P}(X = 3) \approx 0,1239 < 0,25$

A : Für $p = 0,4$.

b) … **höchstens** 3 Mal „Zahl“ erhalten möchte?

gegeben: $n = 8$; $k \le 3$
Bedingung: $\mathrm{P} > 0,25$
gesucht: p

kumulierte BV
(geg. p-Werte probieren)

$p = 0,2$;
$\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,9437 > 0,25$
$p = 0,4$;
$\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,5941 > 0,25$
$p = 0,6$;
$\mathrm{P}(X \le 3) \approx 0,1737 < 0,25$

A : Für $p = 0,2$ o. $p = 0,4$.

c) … **mindestens** 3 Mal „Zahl“ erhalten möchte?

gegeben: $n = 8$; $k \ge 3$
Bedingung: $\mathrm{P} > 0,25$
gesucht: p

kumulierte BV
(geg. p-Werte probieren;
$\mathrm{P}(X \le 2) \le 0,75 \Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) > 0,25$)

$p = 0,2$;
$\mathrm{P}(X \le 2) = 0,7969$
$\Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) = 0,2031 < 0,25$
$p = 0,4$
$\mathrm{P}(X \le 2) = 0,3154$
$\Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) = 0,6846 > 0,25$
$p = 0,6$
$\mathrm{P}(X \le 2) = 0,0498$
$\Rightarrow \mathrm{P}(X \ge 3) = 0,9502 > 0,25$

A : Für $p = 0,4$ oder $p = 0,6$.

Beispiel

a) Erfahrungsgemäß sind 4 % der produzierten Smartphones eines Herstellers defekt. Ein Kunde erhält ein Paket mit 50 Smartphones des Herstellers.

Anzahl	Aufgabentyp	Lösung
Wahrscheinlichkeit für 3 defekte Smartphones?	**Typ 1 (genau)** geg. $n = 50$ $p = 0,04$ $k = 3$ ges. P	**Binomialverteilung (BV)** $\text{P}(\text{X} = 3) = 0,1842$
Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3 defekte Smartphones?	**Typ 1 (genau)** geg. $n = 50$ $p = 0,04$ $k = 2$ oder 3 ges. P	**BV** $\text{P}(\text{X} = 2) + \text{P}(\text{X} = 3)$ $= 0,2762 + 0,1842 = 0,4604$
Wahrscheinlichkeit für mindestens 2 defekte Smartphones?	**Typ 1 (mind.)** geg. $n = 50$ $p = 0,04$ $k \geq 2$ ges. P	**kumulierte BV** $\text{P}(\text{X} \geq 2) = 1 - \text{P}(\text{X} \leq 1)$ $= 1 - 0,4005 = 0,5995$
Wahrscheinlichkeit für mehr als 2, aber weniger als 8 defekte Smartphones?	**Typ 1 (mind. / höchst.)** geg. $n = 50$ $p = 0,04$ $2 < k < 8$ ges. P	**kumulierte BV** $\text{P}(2 < \text{X} < 8) = \text{P}(3 \leq \text{X} \leq 7)$ $= \text{P}(\text{X} \leq 7) - \text{P}(\text{X} \leq 2)$ $= 0,9992 - 0,6767 = 0,3225$

b) Weitere Aufgabenstellungen.

Anzahl	Aufgabentyp	Lösung
Wie viele defekte Smartphones müsste das Paket enthalten, wenn die Wahrscheinlichkeit hierfür ungefähr 1 % betragen soll?	**Typ 2 (genau)** geg: $n = 50$; $p = 0,04$ Bed.: $P(X = k) \approx 0,01$ ges.: k	**BV** (Liste für mehrere k-Werte) $P(X = 4) = 0,0902$ $P(X = 5) = 0,0346$ $P(X = 6) = 0,0108 \leftarrow$ $P(X = 7) = 0,0028$ $P(X = 8) = 0,0006$ A: Das Paket müsste also 6 defekte Smartphones enthalten.
Wie viele defekte Smartphones müsste das Paket mindestens enthalten, wenn die Wahrscheinlichkeit hierfür weniger als 5 % betragen soll?	**Typ 2 (mind.)** geg: $n = 50$; $p = 0,04$ Bed.: $P(X \geq k) < 0,05$ ges.: k	**kumulierte BV** (Liste für mehrere k-Werte; Gegenereignis) $P(X \leq 2) = 0,6767 \Rightarrow P(X \geq 3) = 0,3233$ $P(X \leq 3) = 0,8609 \Rightarrow P(X \geq 4) = 0,1391$ $P(X \leq 4) = 0,9510 \Rightarrow P(X \geq 5) = 0,0490 \downarrow$ $P(X \leq 5) = 0,9856 \Rightarrow P(X \geq 6) = 0,0144$ A: Das Paket müsste also 5 oder mehr defekte Smartphones enthalten.
Wie viele Smartphones des Herstellers müsste der Kunde überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 10 % mindestens 4 defekte zu erhalten?	**Typ 3 (mind.)** geg: $p = 0,04$ $k \geq 4$ Bed.: $P > 0,1$ ges.: n	**kumulierte BV** (Mehrere n-Werte probieren; $P(X \leq 3) \leq 0,9 \quad \Rightarrow \quad P(X \geq 4) > 0,1$) $n = 43$; $P(X \leq 3) = 0,9078 \Rightarrow P(X \geq 4) = 0,0922$ $n = 44$; $P(X \leq 3) = 0,9016 \Rightarrow P(X \geq 4) = 0,0984$ $n = 45$; $\downarrow$ $P(X \leq 3) = 0,8953 \Rightarrow P(X \geq 4) = 0,1047$ $n = 46$; $P(X \leq 3) = 0,8887 \Rightarrow P(X \geq 4) = 0,1113$ A: Der Kunde müsste also 45 oder mehr Smartphones überpüfen.

Anzahl	Aufgabentyp	Lösung
Wie viele Smartphones des Herstellers müsste der Kunde überprüfen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 70 % höchstens ein defektes zu erhalten?	**Typ 3 (höchst.)** geg: $p = 0,04$ $k \leq 1$ Bed.: $\mathrm{P} < 0,7$ ges.: n	**kumulierte BV** (Mehrere n-Werte probieren) $n = 26;\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) \approx 0,7208$ $n = 27;\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) \approx 0,7058$ $n = 28;\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) \approx 0,6909\ \downarrow$ $n = 29;\ \mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 1) \approx 0,6760$ A: Der Kunde müsste also 28 oder mehr Smartphones überpüfen.
Die Defektwahrscheinlichkeit p beträgt nun entweder 11%, 12% oder 13%. Welcher Wert für p kann stimmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket genau 5 defekt sind, weniger als 15 % betragen soll?	**Typ 4 (genau)** geg: $n = 50;$ $k = 5$ Bed.: $\mathrm{P} < 0,15$ ges.: p	**BV** (gegebene p-Werte probieren) $p = 0,11;$ $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) \approx 0,1801\ \ > 0,15$ $p = 0,12;$ $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) \approx 0,1674\ \ > 0,15$ $p = 0,13;$ $\mathrm{P}(\mathrm{X} = 5) \approx 0,1493\ \ < 0,15$ A: Für p=0,13.
Die Defektwahrscheinlichkeit p beträgt nun entweder 11%, 12% oder 13%. Welcher Wert für p kann stimmen, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Paket (nur) höchstens 3 defekt sind, weniger als 10 % betragen soll?	**Typ 4 (höchst.)** geg: $n = 50;$ $k \leq 3$ Bed.: $\mathrm{P} < 0,1$ ges.: p	**kumulierte BV** (gegebene p-Werte probieren) $p = 0,11;$ $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) \approx 0,1854\ \ > 0,10$ $p = 0,12;$ $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) \approx 0,1345\ \ > 0,10$ $p = 0,13;$ $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leq 3) \approx 0,0958\ \ < 0,10$ A: Für p=0,13.

2.4 Erwartungswert

Formel (bei Binomialverteilung)

$\mathbf{E(X)} = \boldsymbol{n \cdot p}$ $\quad$ n – Anzahl der Versuche (Durchführungen)

p – Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“ (Erfolg)

Am Beispiel 1 (siehe Vorseite)

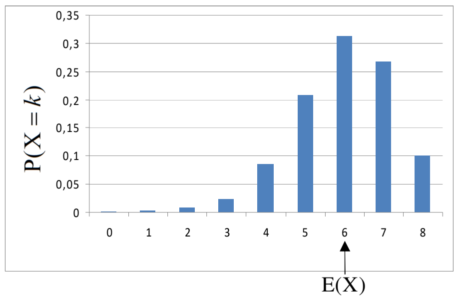
$\mathrm{E(X)} = 8 \cdot 0{,}75 = 6$

Interpretation: Der Basketballspieler kann durchschnittlich 6 Treffer bei 8 Würfen erwarten.

Grafische Betrachtung

„In der Nähe des Erwartungswertes“ befinden sich die Werte von X mit den höchsten Wahrscheinlichkeiten.

„Fällt“ der Erwartungswert (wie hier) direkt auf einen Wert von X, so liegt an diesem stets die höchste Wahrscheinlichkeit vor.



Beispiel 2

In einem Karton befinden sich 50 Bauteile. Ein Bauteil ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 3 % defekt. Wie viele defekte Bauteile sind in einem Karton zu erwarten?

$\mathrm{E(X)} = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}03 = 1{,}5$

In einem Karton sind durchschnittlich 1,5 defekte Bauteile zu erwarten.