2. Binomialverteilung

2.1 Bernoulli-Formel

Zugrunde liegt ein mehrfach ausgeführtes Bernoulli-Experiment, bei dem …
… nur **zwei mögliche Ergebnisse** („Treffer“ oder „Niete“) eintreten können
und
… sich die **Wahrscheinlichkeiten nicht ändern** (z.B. „Ziehen **mit** Zurücklegen“)

Beispiele: Münzwurf („Kopf“ oder „Zahl“); Mehrfach würfeln („6“ oder „keine 6“); …

Bernoulliformel (allg.)

$$\mathbf{P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}}$$

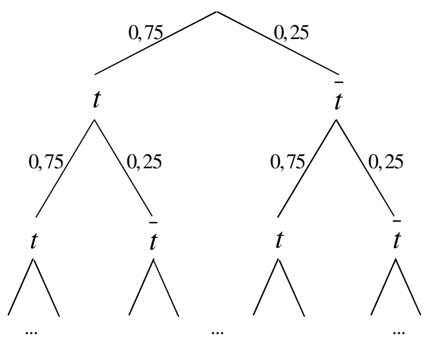
n: Anzahl der Versuche (Durchführungen)
k: Anzahl der „Treffer“
p: Wahrscheinlichkeit für einen „Treffer“

Bernoulliformel (in Worten)

$$\text{P(X = Anz. Treffer)} = \binom{\text{Anz. Versuche}}{\text{Anz. Treffer}}\cdot \text{Trefferwahrsch.}^{\text{Anz. Treffer}}\cdot \text{Nietenwahrsch.}^{\text{Anz. Nieten}}$$

Beispiel 1
Ein Basketballspieler trifft (t) erfahrungsgemäß einen Freiwurf mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. Er wirft 8 Mal.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft er insgesamt 5 Mal (und 3 Mal nicht)?

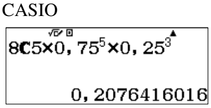
$$P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3 \approx 0,2076$$



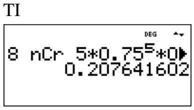
(8 Stufen)
(alle Pfade mit 5 Mal t und 3 Mal $\bar{t}$ relevant)

Eingabe in WTR (mit Taste nCr):

CASIO



TI



Erläuterungen

- Binomialkoeffizient (allg.): $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$
- $n!$ steht für die Fakultät einer Zahl: $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1$
- $P(X=5)=\binom{8}{5}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3=\dfrac{8!}{5!\cdot(8-5)!}\cdot 0,75^5\cdot 0,25^3 = 56\cdot 0,00371\approx 0,2078.$

Es gibt also 56 mögliche Reihenfolgen für 5 Treffer unter 8 Schüssen ($ttttt\bar{t}\bar{t}\bar{t}$, $\bar{t}ttttt\bar{t}\bar{t}$, ...), von welchen jede eine Einzelwahrscheinlichkeit von ungefähr $0,00371$ aufweist.

Beispiel 2: Eine faire Münze wird 5 Mal geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man genau 3 Mal „Zahl“? (Lösen ohne WTR)

$$P(X=3)=\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=10\cdot\frac{1}{32}=\frac{5}{16}$$

$$\left(\text{Nebenrechnung: }\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\cdot(5-3)!}=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{(3\cdot2\cdot1)\cdot(2\cdot1)}=\frac{5\cdot4\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1}}{(\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{1})\cdot(2\cdot1)}=10\right)$$

Beispiel 3: Ein Bauteil ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % defekt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich in einem Karton mit 50 Bauteilen genau 3 defekte Bauteile?

$$P(X=3)=\binom{50}{3}\cdot 0{,}04^3\cdot 0{,}96^{47}\,(\approx 19600\cdot 0{,}000009396)\approx 0{,}184=18{,}4\,\%$$

(Es gibt also 19600 mögliche Reihenfolgen für 3 defekte unter 50 (nacheinander entnommenen) Bauteilen.)

Beispiel 4

Jonas würfelt 24 Mal.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 7 Mal eine 3?

$$P(X=7)=\binom{24}{7}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^7\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{17}\approx 0{,}056$$

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält er genau 10 Mal eine 2 oder eine 3?

$$\left(\text{Wahrscheinlichkeit für 2 oder 3: }\frac{2}{6}\right)$$

$$P(X=10)=\binom{24}{10}\cdot\left(\frac{2}{6}\right)^{10}\cdot\left(\frac{4}{6}\right)^{14}\approx 0{,}114$$

Beispiel 5

Jakob hat einen deformierten Würfel. Die Wahrscheinlichkeit für eine 6 wird mit p bezeichnet. Jakob würfelt 3 Mal.

a) Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass 2 Mal eine 6 gewürfelt wird.

$$P(X=2)=\binom{3}{2}\cdot p^2\cdot(1-p)^1=3\cdot p^2\cdot(1-p)$$

b) Interpretieren Sie die Ungleichung im Sachzusammenhang.

$$p^3+3\cdot p^2\cdot(1-p)>0{,}95$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Mal oder 2 Mal eine 6 gewürfelt wird, soll mehr als 95% betragen.