1. Baumdiagramm und Pfadregeln

1.1 Einführung

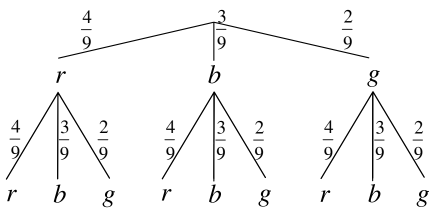
Beispiel 1: In einer Urne befinden sich 4 rote, 3 blaue und 2 grüne Kugeln. Es werden nacheinander 2 Kugeln entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird 2-mal die gleiche Farbe gezogen? Entnommene Kugeln werden hierbei …

a) … wieder zurückgelegt.
(Ziehen mit Zurücklegen)

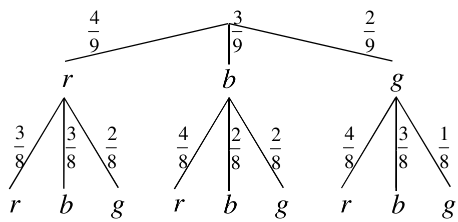
b) … nicht wieder zurückgelegt.
(Ziehen ohne Zurücklegen)

1. Schritt: Baumdiagramm anlegen

a)



b)



Hinweise

- Zu Beginn befinden sich 9 Kugeln in der Urne, von denen 4 rot sind. Dies führt zu einer Wahrscheinlichkeit von 4/9 für rot. (P = günstige/mögliche)
- Summe der Wahrscheinlichkeiten an jeder Verzweigung: 100 %
- **Ziehen ohne Zurücklegen:** Wahrscheinlichkeiten ändern sich hier von Stufe zu Stufe, abhängig davon: **Wie viele** Kugeln schon gezogen wurden (Änderung im **Nenner**) und **welche** Kugeln in den Vorstufen gezogen wurden (Änderung im **Zähler**).

2. Schritt: Ereignis definieren, welches alle gefragten Ergebnisse enthält

$\mathrm{E}=\{rr;bb;gg\}$

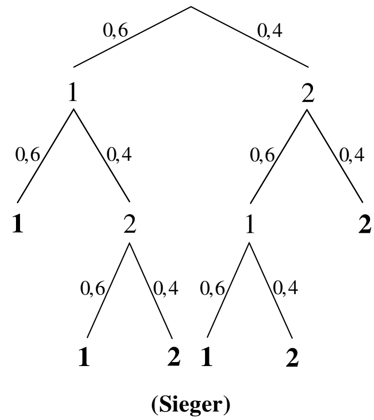
3. Schritt: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses berechnen

a)
$$\mathrm{P(E)}=\mathrm{P}(rr)+\mathrm{P}(bb)+\mathrm{P}(gg)$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{9}\cdot\frac{3}{9}+\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{9}=\frac{29}{81}\approx 0,358$$

b)
$$\mathrm{P(E)}=\mathrm{P}(rr)+\mathrm{P}(bb)+\mathrm{P}(gg)$$
$$=\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}+\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{5}{18}\approx 0,278$$

- **Pfadaddition:** Ergebniswahrscheinlichkeiten aller zugehörigen Ergebnisse addieren.
- **Pfadmultiplikation:** Ergebniswahrscheinlichkeiten durch Multiplikation „entlang ihres Ergebnispfades“.

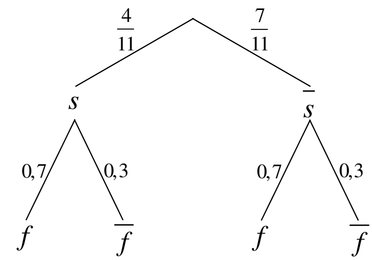
Beispiel 2: Beim Rundlauf (Mäxle) im Tischtennis stehen sich im Finale zwei Spieler gegenüber. Spieler 1 entscheidet mit einer Wahrscheinlichkeit von 60 % einen Ballwechsel für sich. Wer zuerst 2 Ballwechsel gewonnen hat, ist Sieger.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Spieler 1 insgesamt?



$$E = \{11; 121; 211\}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(11) + P(121) + P(211) \\ &= 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}6 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6 + 0{,}4 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \\ &= 0{,}648 = 64{,}8\ \% \end{aligned}$$

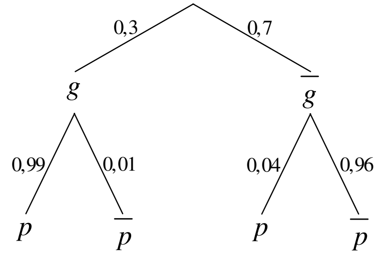
Beispiel 3: In einem Paket befinden sich 11 Smartphones. 4 davon sind vom Hersteller Samsung (*s*). Für 70 % der Handys eines jeden Herstellers wird eine Flatrate (*f*) gebucht. Ein Smartphone wird blind entnommen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es nicht von Samsung und ohne Flatrate.



$$E = \{\overline{s}\,\overline{f}\}$$

$$P(E) = P(\overline{s}\,\overline{f}) = \frac{7}{11} \cdot 0{,}3 \approx 0{,}191 = 19{,}1\%$$

Beispiel 4: 30 % der 100 m-Läufer sind bei einem Wettkampf gedopt (*g*). Ein Dopingtest entlarvt gedopte Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 %. Jedoch erhält auch ein nicht gedopter Sportler mit einer Wahrscheinlichkeit von 4 % ein positives Dopingtest-ergebnis (*p*). Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein zufällig ausgewählter Läufer positiv getestet?



$$E = \{gp; \overline{g}p\}$$

$$\begin{aligned} P(E) &= P(gp) + P(\overline{g}p) \\ &= 0{,}3 \cdot 0{,}99 + 0{,}7 \cdot 0{,}04 = 0{,}325 = 32{,}5\% \end{aligned}$$

Weitere Beispiele und Aufbau der zugehörigen Baumdiagramme

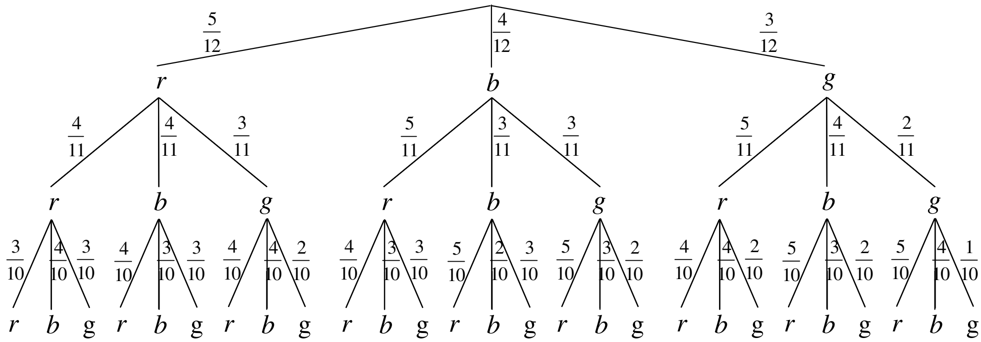
Ziehen mit Zurücklegen	Ziehen ohne Zurücklegen
Beispiel 1: Es befinden sich immer 10 Teile in einem Karton, von denen 3 Teile stets defekt sind. Es werden 7 Kartons geöffnet. **Anzahl Stufen:** 7 **Wahrscheinlichkeiten:** $d:\frac{3}{10};\ \overline{d}:\frac{7}{10}$	**Beispiel 1:** Es befinden sich 10 Teile in einem Karton. 3 Teile davon sind defekt. Aus dem Karton werden 4 Teile entnommen. **Anzahl Stufen:** 4 **Wahrscheinlichkeiten:** $d:\frac{3}{10};\ \overline{d}:\frac{7}{10}$ **(nur 1. Stufe)**
Beispiel 2: Ein Glücksrad mit 6 gleich großen Feldern (1 rotes Feld, 2 blaue Felder, 3 grüne Felder) wird 4-mal gedreht. **Anzahl Stufen:** 4 **Wahrscheinlichkeiten:** $r:\frac{1}{6};\ b:\frac{2}{6};\ g:\frac{3}{6}$	**Beispiel 2:** In einer Lostrommel befinden sich 5 Gewinnlose und 25 Nieten. Es werden 4 Lose gezogen. **Anzahl Stufen:** 4 **Wahrscheinlichkeiten:** $\mathrm{G}:\frac{5}{30};\ \mathrm{N}:\frac{25}{30}$ **(nur 1. Stufe)**
Beispiel 3: Ein Würfel wird 3-mal geworfen. (Oder: 3 Würfel werden gleichzeitig geworfen.) **Anzahl Stufen:** 3 **Wahrscheinlichkeiten:** $1:\frac{1}{6};\ 2:\frac{1}{6};...;6:\frac{1}{6}$	**Beispiel 3:** Eine Rubbelkarte hat 16 Felder. Nur eines davon führt zu einem Gewinn. Ein Spieler rubbelt 3 Felder auf. **Anzahl Stufen:** 3 **Wahrscheinlichkeiten:** $\mathrm{G}:\frac{1}{16};\ \mathrm{N}:\frac{15}{16}$ **(nur 1. Stufe)**
Beispiel 4: Die Prüfung für den Autoführerschein besteht aus 18 Fragen. Bei jeder Frage gibt es 3 Antwortmöglichkeiten, von denen eine richtig ist. Der Prüfling rät. **Anzahl Stufen:** 18 **Wahrscheinlichkeiten:** $r:\frac{1}{3};\ f:\frac{2}{3}$	**Beispiel 4:** Aus einem Skatkartenspiel mit jeweils 8 Karten der Farben Kreuz, Pik, Herz und Karo werden 2 Karten entnommen. **Anzahl Stufen:** 2 **Wahrscheinlichkeiten (nur 1. Stufe):** $\mathrm{Kr}:\frac{8}{32};\ \mathrm{P}:\frac{8}{32};\ \mathrm{H}:\frac{8}{32};\ \mathrm{Ka}:\frac{8}{32}$
Beispiel 5: Ein Schütze schießt 3-mal. Er trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %. **Anzahl Stufen:** 3 **Wahrscheinlichkeiten:** $t:0,75;\ \overline{t}:0,25$	

1.2 Aufgabentypen

Den nachfolgenden 4 Aufgabentypen liegt die gleiche Ausgangssituation und damit das gleiche Baumdiagramm zugrunde.

Ausgangssituation (zu den Aufgabentypen 1-4)
In einer Urne befinden sich 5 rote, 4 blaue und 3 grüne Kugeln. Es werden 3 Kugeln ohne Zurücklegen entnommen.

Baumdiagramm



- **Aufgabentyp 1 (Vorgegebene Reihenfolge, also geordnet)**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden <u>zunächst</u> eine rote Kugel <u>und dann</u> 2 blaue Kugeln gezogen?

$$\mathrm{E} = \{rbb\}$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}) = \mathrm{P}(rbb) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} = \frac{1}{22} \approx 0{,}045 = 4{,}5\ \%$$

- **Aufgabentyp 2 (Ohne vorgegebene Reihenfolge, also ungeordnet)**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden (mit einem Griff) eine rote und 2 blaue Kugeln gezogen?

$$\mathrm{E} = \{rbb; brb; bbr\} \quad \text{(keine vorgegebene Reihenfolge, größere Ergebnismenge)}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(\mathrm{E}) &= \mathrm{P}(rbb) + \mathrm{P}(brb) + \mathrm{P}(bbr)\\ &= \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{10}\\ &= \mathbf{3} \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} \right) \quad \text{(}\mathbf{3}\text{ mögliche Umordnungen, alle mit gleicher Wahrscheinlichkeit)}\\ &= \frac{3}{22} = 0{,}136 = 13{,}6\ \%\end{aligned}$$

- **Aufgabentyp 3 (mit dem Gegenereignis arbeiten)**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird mindestens eine rote oder eine blaue Kugel gezogen?
(Zur Ausgangssituation S. 121)

$\mathrm{E} = \{rrr; rrb; rrg; rbr; ...(\textbf{viele} \text{ weitere})\}$

Idee: Nur wenige Ergebnisse aus der Ergebnismenge gehören nicht zum Ereignis E. Das **Gegenereignis** ($\overline{\mathrm{E}}$: Nur grüne Kugeln) beinhaltet damit nur ein einziges Ergebnis, wodurch dessen Wahrscheinlichkeit schnell berechnet werden kann.

$\overline{\mathrm{E}} = \{ggg\}$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{E}}) = \mathrm{P}(ggg) = \frac{3}{12} \cdot \frac{2}{11} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{220} \approx 0{,}0045 = 0{,}45\ \%$$

$$\mathbf{P(E)} \ \mathbf{= 1 - P(\overline{E})} = 1 - \frac{1}{220} = \frac{219}{220} \approx 0{,}9955 = 99{,}55\ \%$$

Falls die Signalwörter **„mindestens“** oder **„höchstens“** in Aufgabenstellungen enthalten sind, können diese oftmals mit dem **Gegenereignis** bearbeitet werden.

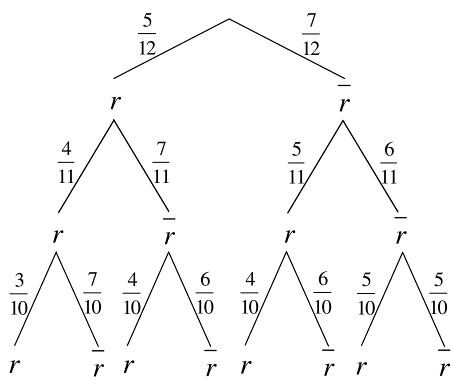
- **Aufgabentyp 4 (Baumdiagramm verkleinern)**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird genau eine rote Kugel gezogen?
(Zur Ausgangssituation S. 121)

$\mathrm{E} = \{rbb; rbg; rgb; rgg; brb; ...(\textbf{viele} \text{ weitere})\}$

Idee: Bei dieser Aufgabenstellung ist es nicht relevant, ob bei einem Zug eine blaue oder eine grüne Kugel gezogen wird. Es geht nur darum, ob die gezogene Kugel rot ist oder eben nicht. Deshalb können jene beiden Äste zu einem $\overline{r}$-Ast zusammengelegt werden. Hierdurch wird das Baumdiagramm kleiner.

$\mathrm{E} = \{(r\overline{r}\overline{r}); (\overline{r}r\overline{r}); (\overline{r}\overline{r}r)\}$

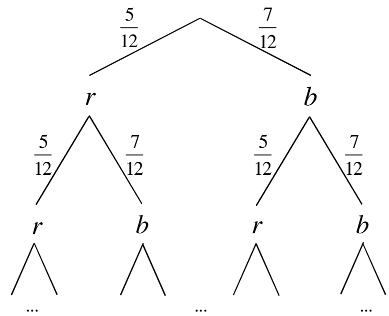


$$\begin{aligned}
\mathrm{P(E)} &= \mathrm{P}(r\overline{r}\overline{r}) + \mathrm{P}(\overline{r}r\overline{r}) + \mathrm{P}(\overline{r}\overline{r}r) \\
&= \frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{7}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{6}{10} + \frac{7}{12} \cdot \frac{6}{11} \cdot \frac{5}{10} \\
&= 3 \cdot \left(\frac{5}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} \right) \\
&= \frac{21}{44} \approx 0{,}477 = 47{,}7\ \%
\end{aligned}$$

- **Aufgabentyp 5 („*Wie oft muss man mindestens …?*“)**

In einer Urne befinden sich 5 rote und 7 blaue Kugeln. Entnommene Kugeln werden stets wieder zurückgelegt.

Wie oft muss man mindestens ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens eine rote Kugel zu ziehen, größer als 90 % ist?



(unbekannte Anzahl an Stufen)

$\mathrm{E} = \{(rr...r);(rr...b);(rb...r);...(\textbf{viele}\text{ weitere})\}$

Idee: Nur ein Pfad am Baumdiagramm gehört nicht zum Ereignis. Das **Gegenereignis** ($\overline{\mathrm{E}}$: *Gar keine rote Kugel*) beinhaltet damit nur ein einziges Ergebnis: $\overline{\mathrm{E}} = \{(bb...b)\}$.

$$\mathrm{P}(\text{mind. ein Mal } r) > 0{,}9 \qquad \text{(Aufgabenstellung abschreiben)}$$

$$1 - \mathrm{P}(\text{kein Mal } r) > 0{,}9 \qquad \text{(Vorgehen über Gegenereignis)}$$

$$1 - \mathrm{P}(bb...b) > 0{,}9$$

$$1 - \left(\frac{7}{12}\right)^n > 0{,}9 \quad |-1$$

$$-\left(\frac{7}{12}\right)^n > -0{,}1 \quad |\cdot(-1) \qquad \text{(Mult. mit neg. Zahl: } > \to < \text{)}$$

$$\left(\frac{7}{12}\right)^n < 0{,}1 \quad |\ln \qquad \text{(ln( ), da Exponentialgleichung)}$$

$$\ln\left(\left(\frac{7}{12}\right)^n\right) < \ln(0{,}1)$$

$$n \cdot \ln\left(\left(\frac{7}{12}\right)\right) < \ln(0{,}1) \qquad \text{(Regel: } \ln(a^b) = b \cdot \ln(a)\text{)}$$

$$n \cdot (-0{,}539) < -2{,}303 \quad |:(-0{,}539) \qquad \text{(Division durch neg. Zahl: } < \to > \text{)}$$

$$n > 4{,}273$$

A: Mindestens 5-mal ziehen! (Immer Aufrunden!)