Lösen von Gleichungen mit dem Satz vom Nullprodukt

Ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist.

Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$.

Um die Gleichung zu lösen, setzt man die einzelnen Klammern gleich Null und löst anschließend nach x auf.

Erste Klammer gleich Null $(2x^2 - 8) = 0 \implies x^2 = 4 \implies x_{1,2} = \pm 2$

Zweite Klammer gleich Null $(e^{2x} - 6) = 0 \implies 2x = \ln(6) \implies x_3 = \frac{\ln(6)}{2}$

Lösen von Gleichungen mit der Mitternachtsformel

Die Nullstellen einer quadratischen Gleichung lassen sich mit der **ABC-Formel** oder der **pq-Formel** berechnen.

ABC-Formel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac)}}{2a}$; pq-Formel: $\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

In vielen Abituraufgaben kann die Formel aber nicht sofort angewendet werden. In diesem Fall ist es zuerst nötig, die Gleichung in ein Polynom zweiter Ordnung ($ax^2 + bx + c = 0$) umzuformen. Für diese Umformung benötigt man häufig eine **Substitution**.

Beispiel: Lösen Sie die Gleichung $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$

Durch Substitution mit $e^x = z$ erhält man: $z^2 - 2z - 15 = 0$

Die Koeffizienten des Polynoms ($a = 1,\ b = -2,\ c = -15$) werden jetzt in die Mitternachtsformel eingesetzt. Hieraus ergibt sich

$$z_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15))}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2}$$

mit den Lösungen: $z_1 = 5$ und $z_2 = -3$

Jetzt erfolgt die Re-substitution $e^x = 5$ mit der Lösung $x_1 = \ln 5$. Durch Re-substitution mit $e^x = -3$ erhält man keine weitere Lösung, da der Logarithmus für negative Zahlen nicht existiert.