7. Zusatz: Bewegungsaufgaben (Modellieren mit Vektoren)

Grundwissen

U-Boote, Flugzeuge,... bewegen sich meist geradlinig mit konstanter Geschwindigkeit.
Ihre Bahngleichungen können somit durch Geradengleichungen beschrieben werden.

Beispiel: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix}$ (t in Stunden ($t \in \mathbb{R}$), sonstige Angaben in km)

„Bausteine" der Bahngleichung	Interpretation
$\begin{pmatrix} 20 \\ 30 \\ 10 \end{pmatrix}$ (Stützvektor)	Koordinaten des Startpunktes der Bewegung
t (Parameter)	vergangene Zeit nach (Beobachtungs-)Beginn der Bewegung
$\begin{pmatrix} 60 \\ -40 \\ 25 \end{pmatrix} = \vec{v}$ (Richtungsvektor)	gibt an, wie sich die Koordinaten des Objektes innerhalb von einer Stunde ändern.
$\lvert \vec{v} \rvert$ (Länge Richtungsvektor)	Geschwindigkeit des Objektes (in km/h)
$\vec{x}$	Ort des Objektes nach t Stunden

Beispiel 1 (Musteraufgabe mit **einem** Objekt)

Ein Modellflugzeug befindet sich zu Beginn der Beobachtung im Punkt $A(100|100|100)$.
Nach 3 Stunden befindet es sich im Punkt $B(10|250|85)$.

a) Geben Sie die Bahngleichung an.

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 10 \\ 250 \\ 85 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -90 \\ 150 \\ -15 \end{pmatrix}$ in 3 Stunden, somit $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ 150 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} = \vec{v}$ pro Stunde.

Bahngleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) Steigt oder sinkt das Flugzeug? Mit welcher Geschwindigkeit fliegt es?

x_3-Komponente des Richtungsvektors ist negativ (-5): Somit sinkt es.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = \sqrt{(-30)^2 + 50^2 + (-5)^2} = 58{,}52$ (km/h)

c) Wo befindet sich das Flugzeug 1,2 Stunden nach Beginn der Beobachtung?

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 100 \end{pmatrix} + 1{,}2 \cdot \begin{pmatrix} -30 \\ 50 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 \\ 160 \\ 94 \end{pmatrix} \rightarrow$ Im Punkt $P(64|160|94)$.

Beispiel 2 (Musteraufgabe mit **zwei** Objekten)

Die Bahngleichungen der Flugzeuge 1 und 2 lauten (t in min, sonstige Angaben in km):

Flugzeug 1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$; Flugzeug 2: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$ (mit $t \in \mathbb{R}$)

a) Kommt es zu einem Zusammenstoß der beiden Flugzeuge?

(gleicher Ort $\rightarrow$ gleichsetzen; **gleicher Zeitpunkt** $\rightarrow$ **gleiche Parameter**)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow t \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t = 3{,}75 \\ t = 3 \\ t = 8 \end{array}$$

Widerspruch, LGS ist unlösbar. Somit kommt es zu keinem Zusammenstoß.

b) Schneiden sich die beiden Flugbahnen?

(gleicher Ort $\rightarrow$ gleichsetzen; **verschiedene Zeitpunkte** $\rightarrow$ **verschiedene Parameter**)

Mit $s, t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -30 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4s - 12t = -30 & (1) \\ 4s - 9t = -15 & (2) \\ s = 8 & (3) \end{cases}$$

Einsetzen von $s = 8$:

in (1): $32 - 12t = -30 \Rightarrow t = \dfrac{31}{6}$

in (2): $32 - 9t = -15 \Rightarrow t = \dfrac{47}{9}$

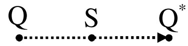
Widerspruch, LGS ist unlösbar. Somit schneiden sich die Flugbahnen nicht.

Körper treffen sich $\rightarrow$	gl. Ort, **gleiche** Zeit	$\rightarrow$ gleichs., **gleiche** Param.
Bahnen treffen sich $\rightarrow$	gl. Ort, (ev.) **verschiedene** Zeit	$\rightarrow$ gleichs., **verschiedene** Param.

8. Spiegelungen

1. Punkt an Punkt

Beispiel: $Q(1|-2|3)$ an $S(0|4|-3)$.

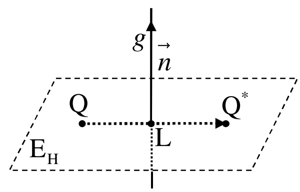


Vorgehen: $\overrightarrow{\mathbf{OQ}^*} = \overrightarrow{\mathbf{OQ}} + 2 \cdot \overrightarrow{\mathbf{QS}}$

Lösung: $\overrightarrow{OQ^*} = \overrightarrow{OQ} + 2 \cdot \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0-1 \\ 4-(-2) \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \\ -9 \end{pmatrix} \rightarrow Q^*(-1|10|-9)$

2. Punkt an Gerade

Beispiel: $Q(6|-6|9)$ an $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$



Schritt 1: Hilfsebene $\mathbf{E_H}$ bilden, die den Punkt **Q enthält** und **senkrecht auf der Geraden *g*** steht (Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor von E_H verwenden). Dann werden die Koordinaten des Punktes Q eingesetzt.

$E_H: -2x_1 + x_2 + x_3 = d$

$Q \in E_H: \ -2 \cdot 6 - 6 + 9 = d \Leftrightarrow -9 = d \quad \Rightarrow E_H: -2x_1 + x_2 + x_3 = -9$

Schritt 2: Hilfsebene $\mathbf{E_H}$ mit der **Geraden *g* schneiden**. Der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt L.

„Allgemeinen Geradenpunkt“ $P_r(4-2r|5+r|6+r)$ in E_H einsetzen:

$-2x_1 + x_2 + x_3 = -9 \Leftrightarrow -2 \cdot (4-2r) + 5 + r + 6 + r = -9 \Leftrightarrow r = -2;$

$r = -2$ einsetzen: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow L(8|3|4)$

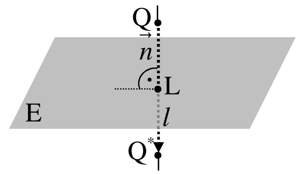
Schritt 3: Der **Punkt Q** wird **am Lotfußpunkt L gespiegelt**.

$\overrightarrow{OQ^*} = \overrightarrow{OQ} + 2 \cdot \overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8-6 \\ 3-(-6) \\ 4-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow Q^*(10|12|-1)$

Hinweis: Ähnliches Vorgehen wie bei der Abstandsberechnung: ***Punkt – Gerade***.

3. Punkt an Ebene

Beispiel: $Q(1|2|3)$ an $E: 2x_1 - x_2 + 4x_3 = -9$

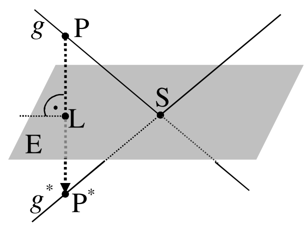


Schritt 1: Lotgerade *l* bilden, die den Punkt **Q enthält** und **senkrecht auf der Ebene E** steht. (Q als Stützpunkt und Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor verwenden).
$l: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow \quad l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)
Schritt 2: Lotgerade *l* mit der **Ebene E schneiden**. Der Schnittpunkt ist der Lotfußpunkt L.
„Allgemeinen Geradenpunkt" $P_r(1+2r\,\vert\,2-r\,\vert\,3+4r)$ in E einsetzen: $2x_1 - x_2 + 4x_3 = -9 \Leftrightarrow 2\cdot(1+2r)-(2-r)+4\cdot(3+4r) = -9 \Leftrightarrow r = -1;$ $r = -1$ einsetzen: $\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow L(-1\,\vert\,3\,\vert\,-1)$
Schritt 3: Der **Punkt Q** wird **am Lotfußpunkt L gespiegelt**.
$\overrightarrow{OQ^*} = \overrightarrow{OQ} + 2\cdot\overrightarrow{QL} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1-1 \\ 3-2 \\ -1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \rightarrow Q^*(-3\,\vert\,4\,\vert\,-5)$

Hinweis: Ähnliches Vorgehen bei der Abstandsberechnung: ***Punkt – Ebene***.

4. Gerade an Ebene

Schritt 1: Gerade mit Ebene schneiden. Der Schnittpunkt S ist der erste Punkt von g^*.
Schritt 2: Stützpunkt P der Geraden g an der Ebene spiegeln (siehe 3.). Man erhält P^*, den zweiten Punkt von g^*.
Schritt 3: Aufstellen der Geradengleichung von g^* aus den beiden Punkten S und P^*.



Hinweis: Falls die zu spiegelnde Gerade g und die Ebene E parallel sind, muss nur der Stützpunkt der Geraden gespiegelt werden, was zum Stützpunkt von g^* führt. Da g und g^* parallel sind, kann der Richtungsvektor von g in g^* übernommen werden.