2.4 Lineare Gleichungssysteme

1. Lösungsvorgehen (an Beispielen)

Beispiel 1

$$\begin{aligned} 2a+b+c &= 5 \\ -2a+3c &= -1 \\ 2a+2b-2c &= 2 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{7} & \mathbf{7} \end{array}\right)$$

LGS hat
eindeutige Lösung

$$\begin{aligned} \mathrm{III}:\ 7c &= 7 \\ c &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in II}:\ b+4\cdot 1 &= 4 \\ b &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{in I}:\ 2a+0+1 &= 5 \\ a &= 2 \end{aligned}$$

Beispiel 2

$$\begin{aligned} 2a-2b+c &= -2 \\ a-c &= 1 \\ -a-2b+4c &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{II} \\ \mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-5} \end{array}\right)$$

LGS hat
keine Lösung

da $\mathrm{III}:\ 0c=-5$
(Widerspruch)

Beispiel 3

$$\begin{aligned} 2a-3b+4c &= 1 \\ -2a+2b-2c &= 2 \\ a-b+c &= -1 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{II}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$$

LGS hat
unendlich viele Lösungen

Setzen von $c=t \quad (t\in\mathbb{R})$

in II:

$$\begin{aligned} -b+2t &= 3 \\ -b &= -2t+3 \\ b &= 2t-3 \end{aligned}$$

in I:

$$\begin{aligned} 2a-3\cdot(2t-3)+4t &= 1 \\ 2a-6t+9+4t &= 1 \\ 2a &= 2t-8 \\ a &= t-4 \end{aligned}$$

Hinweis: Sobald bei zwei Gleichungen in der ersten Spalte eine Null steht, sollte nur noch mit diesen beiden Gleichungen gerechnet werden. Grund: Wenn die andere Gleichung mit einbezogen wird, verschwindet eine Null aus der ersten Spalte wieder.

2. Übersicht (vereinfacht)

Gegebenes LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{array}\right)$

Umformungen:
- Zeile mit Zahl multiplizieren bzw. durch Zahl dividieren (außer 0)
- Vielfache von Zeilen addieren oder subtrahieren
- Zeilentausch
- Spaltentausch

LGS in Dreiecksform: $\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet \end{array}\right)$

Letzte Zeile entscheidet über Lösbarkeit

$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\neq 0} & \bullet \end{array}\right)$

LGS hat **eine Lösung**

$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\neq 0} \end{array}\right)$

LGS hat **keine Lösung**

$\left(\begin{array}{ccc|c} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right)$

LGS hat **unendlich viele Lösungen**

Homogenes LGS

- Falls auf der **„rechten Seite“** eines LGS alle Zahlen den Wert **0** haben, wird das LGS als **homogen** bezeichnet.
- Ein homogenes LGS hat entweder eine eindeutige Lösung oder unendlich viele Lösungen, aber niemals keine Lösung. Falls ein homogenes LGS eine eindeutige Lösung hat, lautet diese stets $\boldsymbol{a = 0}$; $\boldsymbol{b = 0}$; $\boldsymbol{c = 0}$.

Hinweis: Das Lösen von LGS ist inbesondere bei „Steckbriefaufgaben“ (S. 58) und in der Vektorgeometrie (ab S. 81) wichtig.

2.5 Ungleichungen

Vorgehen zur Lösung

1. Zunächst wird die zugehörige Gleichung gelöst.

2. Dann betrachtet man die (eventuell umgestellte) Gleichung als Funktionsterm und skizziert das Schaubild in das Koordinatensystem. Die Lösungen der Gleichung aus 1. sind die Nullstellen der Funktion.

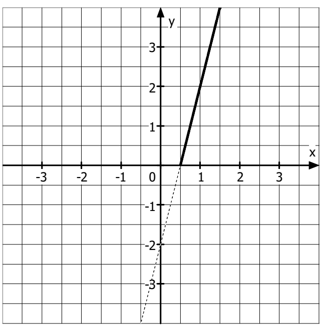
3. Durch Betrachtung, an welchen x-Werten das Schaubild ober- bzw. unterhalb der x-Achse verläuft, erhält man die Lösungsmenge.

a) $4x-2>0$

1. Zugehörige Gleichung lösen

$$4x-2=0$$
$$4x=2$$
$$x=0,5$$

2. Betrachtung im Koordinatensystem



>0

Schaubild zu $y=4x-2$

3. Lösungen notieren

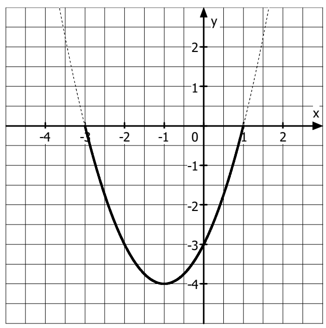
$x>0,5$

b) $(x+3)\cdot(x-1)\ \leq 0$

1. Zugehörige Gleichung lösen

$$(x+3)\cdot(x-1)\ =0$$
S. v. Nullpr.
$$x_1=-3; \qquad x_2=1$$

2. Betrachtung im Koordinatensystem



$=0$

<0

Schaubild zu $y=(x+3)\cdot(x-1)$
(Parabel, nach oben geöffnet)

3. Lösungen notieren

$-3\leq x\leq 1$

Alternative zum 2. bzw. 3. Schritt (am Beispiel b))

Schritt 1 ergibt die beiden Nullstellen $x_1=-3$ und $x_2=1$.
Z.B. $x=0$ liegt zwischen den beiden Nullstellen und wird eingesetzt:
$(0+3)\cdot(0-1)=3\cdot(-1)=-3$
Zwischen den Nullstellen liegen also (die gesuchten) negativen Werte.
(Für $x<-3$ und $x>1$ liegen somit positive Werte vor.)
Der Lösungsbereich befindet sich also zwischen den Nullstellen: $-3\leq x\leq 1$

c) $-x^2+2x+1<x-1$

1. Zugehörige Gleichung lösen

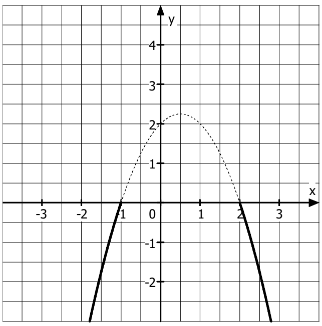
$$-x^2+2x+1=x-1 \quad |-x+1$$

$$-x^2+x+2=0$$

$$x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 2}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 3}{-2}$$

$x_1=-1;\quad x_2=2$

2. Betrachtung im Koordinatensystem



<0

Schaubild zu $y=-x^2+x+2$
(Parabel, nach unten geöffnet)

3. Lösungen notieren

$x<-1$ und x >2

d) $(2x-1)\cdot e^x>0$

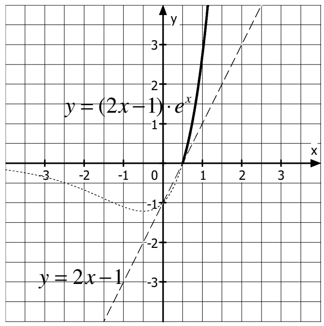
1. Zugehörige Gleichung lösen

$(2x-1)\cdot e^x=0$
S. v. Nullpr.

$2x-1=0 \qquad e^x=0$

$x=\frac{1}{2};\quad$ keine Lösung da $e^x>0$

2. Betrachtung im Koordinatensystem



>0

Das Einzeichnen des Schaubildes zu $y=(2x-1)\cdot e^x$ ist schwierig.

Alternatives Vorgehen:

- $y=2x-1$ kann leicht skizziert werden. Hat negative Werte für $x<0{,}5$ und positive Werte für $x>0{,}5$.
- e^x nimmt nur positive Werte an.
- Das Produkt $(2x-1)\cdot e^x$ hat also die gleichen Vorzeichen wie $y=2x-1$ und somit positive Werte für $x>0{,}5$.

3. Lösungen notieren

$x>0{,}5$