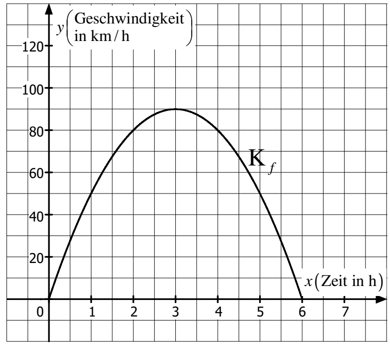
4.4 Mittelwert (durchschnittlicher *y*-Wert) einer Funktion

Beispiel

Die Funktion f mit $f(x) = -10x^2 + 60x$ gibt zu jedem Zeitpunkt die momentane Geschwindigkeit eines Zuges während einer 6-stündigen Zugfahrt an.
Welche **durchschnittliche Geschwindigkeit** hat der Zug von der 2. bis zur 5. Stunde?



Ansatz

$$\boldsymbol{\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\,dx}$$

Lösung

$$\overline{m} = \frac{1}{5-2} \cdot \int_2^5 \left(-10x^2 + 60x\right) dx = \frac{1}{3} \cdot \left[-\frac{10}{3}x^3 + \frac{60}{2}x^2\right]_2^5$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{10}{3} \cdot 5^3 + \frac{60}{2} \cdot 5^2 \quad - \quad \left(-\frac{10}{3} \cdot 2^3 + \frac{60}{2} \cdot 2^2\right)\right) = 80\,[\text{km/h}]$$

Bemerkungen

- Der Ansatz zur Berechnung der **mittleren** (**durchschnittlichen**) **Steigung** eines Schaubildes in einem bestimmten Bereich lautet:

$$\boldsymbol{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f'(x)\,dx} \qquad \left(\text{alternativ über Sekantensteigung: } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\right)$$

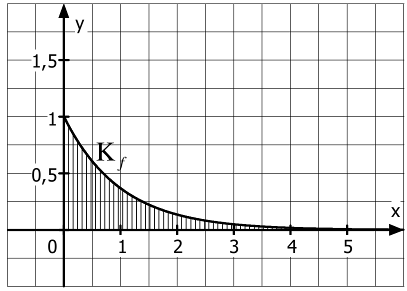
- Der Ansatz zur Berechnung der **mittleren** (**durchschnittlichen**) **Abweichung** zwischen den *y*-Werten zweier Funktionen (bzw. des mittleren Abstandes der zugehörigen Schaubilder) in einem bestimmten Bereich lautet:

$$\boldsymbol{\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \left|f(x) - g(x)\right| dx}$$

4.5 Flächen, die bis ins Unendliche reichen (Uneigentliche Integrale)

Beispiel

Der Inhalt der rechts offenen Fläche, die durch das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{-x}$ und die beiden Koordinatenachsen eingeschlossen wird, soll berechnet werden.



Problem : Schaubild schneidet die x-Achse nicht. Rechte Grenze liegt „unendlich weit rechts".

Vorgehen (am Beispiel)

1. Unbekannte Grenze mit z bezeichnen, damit Flächeninhalt A(z) bestimmen

$$\mathrm{A}(z) = \int_0^z \left(e^{-x}\right) dx = \left[-e^{-x}\right]_0^z = -e^{-z} - \left(-e^0\right) = -e^{-z} - (-1) = -e^{-z} + 1$$

2. A(z) untersuchen, wenn z gegen $+\infty$ strebt $\left(z \to +\infty\right)$

(z.B. $z = 1000 : \mathrm{A}(1000) = -e^{-10000} + 1 \approx 0 + 1 \approx 1$; „Nebenrechnung")

$z \to +\infty$: $\mathrm{A}(z) = -e^{-z} + 1 \to 0 + 1 = 1$ $\Rightarrow$ Flächeninhalt strebt gegen 1 cm^2

Ist es für Sie wirklich einsichtig, dass der Flächeninhalt weniger als 1 cm^2 *beträgt, obwohl sich die Fläche unendlich weit nach rechts erstreckt? Falls nicht, können Sie das schnell ändern, indem Sie das nachfolgende Gedankenexperiment durchführen!*

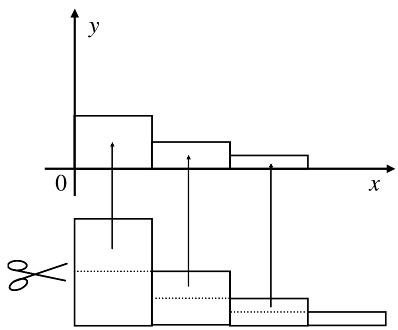
Gedankenexperiment

Mit einer Schere wird ein Blatt Papier halbiert.

Die obere Hälfte wird in ein Koordinatensystem gelegt.

Die untere Hälfte wird wiederum halbiert.

Deren obere Hälfte wird ebenfalls in das Koordinatensystem gelegt.



...

Nach und nach erhält man eine Fläche, welche der im oberen Koordinatensystem dargestellten Fläche ähnelt:
Die Höhe wird ebenfalls immer geringer und die Fläche erstreckt sich ebenfalls unendlich weit nach rechts. Man kann das Blatt ja (zumindest theoretisch) unendlich oft halbieren. Ist der Inhalt der Fläche unendlich groß?
Nein! Er kann niemals größer als die Fläche des Papierblattes sein!
Ebenso verhält es sich mit der oberen markierten Fläche.

4.6 Zusatz: Wichtiges für Anwendungsorientierte Aufgaben

1. Typische Problemstellungen und benötigte Funktionen

Anwendungsorientierte Aufgaben („Textaufgaben“) thematisieren oftmals (zumindest sinngemäß) eine der nachfolgenden Problemstellungen.
Hierbei liegt der Aufgabenschwerpunkt oftmals auf dem bedeutungsmäßigen Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion.

Bedeutung von $f(x)$	**Bedeutung von $f'(x)$**	**Bedeutung von $\int_a^b (f'(x))\,dx$**
Pflanzenhöhe (z.B. in m) in Abhängigkeit von der Zeit (z.B. in s)	Momentane Wachstumsgeschwindigkeit einer Pflanze (z.B. in m/s) in Abh. von der Zeit	Zunahme der Pflanzenhöhe zwischen zwei Zeitpunkten
Vorhandene Wassermenge (z.B. in l) in Abh. von der Zeit (z.B. in s)	Momentane Zu- bzw. Abflussgeschwindigkeit von Wasser (z.B. in l/s) in Abh. von der Zeit	Änderung der vorhandenen Wassermenge zwischen zwei Zeitpunkten
Zurückgelegte Wegstrecke (z.B. in m) in Abh. von der Zeit (z.B. in s)	Momentane Fahrtgeschwindigkeit eines Autos (z.B. in m/s) in Abh. von der Zeit	Zurückgelegte Wegstrecke zwischen zwei Zeitpunkten
Vorhandene Alkoholmenge im Blut (z.B. in g) in Abh. von der Zeit (z.B. in min)	Momentane Abbaugeschwindigkeit von Alkohol im Blut (z.B. in g/min) in Abh. von der Zeit	Änderung der vorhandenen Alkoholmenge im Blut zwischen zwei Zeitpunkten
Beschreibt die: **Aktuellen Werte der „interessierenden Größe“** in Abh. von einer anderen Größe	Beschreibt die: **Momentane Änderung der „interessierenden Größe“** in Abh. von einer anderen Größe	
Häufiges Merkmal: **„Einheit ohne Bruch“ (z.B. m)**	Häufiges Merkmal: **„Einheit mit Bruch“ (z.B. m/s)**	

Hinweis : Die obigen Zusammenhänge gelten natürlich auch zwischen Stammfunktion $F(x)$ und der zugehörigen Funktion $f(x)$.

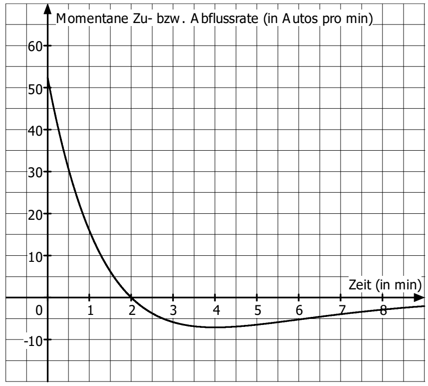
2. Von der Aufgabenformulierung zum Rechenansatz („Schlüsselwörter“)

Da sich anwendungsorientierte Aufgaben auf alle Inhalte der Analysis beziehen können, ist es oftmals schwierig, von der Aufgabenformulierung zum zugehörigen Rechenansatz zu gelangen. Die nachfolgende Zusammenstellung soll Ihnen dabei helfen.

Aufgabenformulierung	**Rechenansatz**
Bestand zum Beobachtungsbeginn; Anfangsbestand; Startwert; …	$f(0)$
Bestand bzw. Wert zu einem bestimmten Zeitpunkt; …	gegebenen Zeitpunkt einsetzen: $f(x_0)$
Ab welchem bzw. bis zu welchem Zeitpunkt liegt mehr bzw. weniger als ein bestimmter Bestand vor; ein bestimmter Wert wird über- bzw. unterschritten; höher bzw. geringer als; …	$f(x) = \text{Wert}$ (gleichsetzen um zum Anfangs- bzw. Endzeitpunkt zu gelangen)
Momentane Änderungsrate; Änderung zu einem Zeitpunkt; steil bzw. flach; Steigung; …	$f'(x)$ bzw. $f'(x_0)$
kleinster (geringster) bzw. größter (höchster) Wert; …	Hoch- oder Tiefpunkt von K_f
größte Änderung; stärkster Zuwachs bzw. stärkste Abnahme; steilste Stelle; …	Wendepunkt von K_f bzw. Hoch oder Tiefpunkt von $K_{f'}$
Winkel; Steigungswinkel; …	$\tan\alpha = m$
Größter bzw. kleinster Flächeninhalt, Volumen, Abstand, Länge, ...	Extremwertaufgabe
Langfristig, über sehr langen Zeitraum; Grenzwert; … (bei *e*-Funktion)	Asymptote
gesamt; insgesamt; …	$\int_a^b f(x)\,dx$
mittlerer; durchschnittlicher; …	$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b \left(f(x)\right) dx$

Beispiel

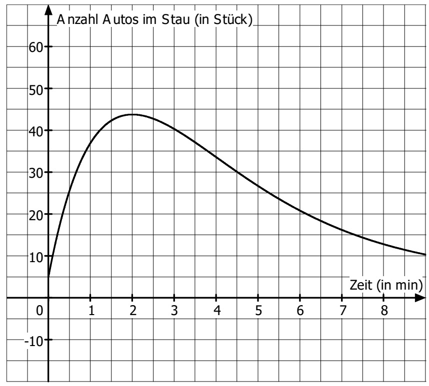
Auf der Autobahn A8 bildet sich ein Stau.
Das Koordinatensystem enthält den Graphen der Funktion f mit $f(t)$, welche die momentane Zu- bzw. Abflussrate an Autos darstellt.
(Positive Funktionswerte stehen hierbei für einen Zufluss, negative für einen Abfluss.)



a) Notieren Sie zu jeder Aufgabenstellung einen passenden Rechenansatz.

Aufgabenformulierung	Rechenansatz
Wie viele Autos stehen in t=1 mehr im Stau als in t=0?	$\int_0^1 f(t)\ dt$
Um wie viele (betroffene) Autos hat sich der Stau zwischen der 1. und der 6. Minute verändert?	$\int_1^6 f(t)\ dt$
Wie ist die momentane Zuflussrate im Stau in t =1,4?	$f(1{,}4)$
Zu welchem Zeitpunkt fahren genau so viele Autos in den Stau ein, wie aus diesem heraus?	$f(t)=0$
Zu welchem Zeitpunkt verringert sich die Anzahl der im Stau stehenden Autos am stärksten?	$f'(t)=0$
Zu welchem Zeitpunkt stehen genau so viele Autos im Stau wie in t =0?	$\int_0^{t_1} f(t)\ dt=0$
Wie groß ist die mittlere Zu- bzw. Abflussrate von Autos im Stau zwischen t =1 und t =8?	$\frac{1}{7}\int_1^8 f(t)\ dt$

Das Schaubild enthält den Graphen der zugehörigen Stammfunktion F mit F(t), welche die gesamte Anzahl der im Stau stehenden Autos angibt.



b) Notieren Sie zu jeder Aufgabenstellung einen passenden Rechenansatz.

Aufgabenformulierung	**Rechenansatz**
Zu welchem Zeitpunkt stehen genau 30 Autos im Stau?	$\mathrm{F}(t) = 30$
Zu welchem Zeitpunkt fahren genau so viele Autos in den Stau ein, wie aus diesem heraus?	$\mathrm{F}'(t) = 0$
Wie viele Autos stehen in den ersten 8 Minuten durchschnittlich im Stau?	$\frac{1}{8}\int_0^8 \mathrm{F}(t)\, dt$
In welchem Zeitraum verringert sich die Anzahl der Autos im Stau?	$\mathrm{F}'(t) < 0$