4. Integralrechnung

4.1 Integrationsregeln („Aufleitungsregeln“)

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Elementarregeln	
1	$f(x) = x^5$ $F(x) = \frac{1}{6}x^6$ $f(x) = 1$ $F(x) = x$ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $F(x) = \frac{1}{-1} \cdot x^{-1} = -\frac{1}{x}$ Spezialfall: $f(x) = \frac{1}{x}$ $F(x) = \ln\lvert x \rvert$	$f(x) = x^{Exponent}$ $F(x) = \frac{1}{Exponent+1} \cdot x^{Exponent+1}$ (Potenzregel)
2	$f(x) = e^x$ $F(x) = e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x) = \sin(x)$ $F(x) = -\cos(x)$	$\sin \rightarrow -\cos \rightarrow -\sin \rightarrow \cos \rightarrow \sin$ (*Gegen den Uhrzeigersinn!*)
4	$f(x) = \cos(x)$ $F(x) = \sin(x)$	

Hinweis : Das „Aufleiten“ von $f(x) = \ln(x)$ wird im Abitur nicht verlangt.

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Vorgehensregeln		
5	$f(x) = \mathbf{2} \cdot x^2$ $\mathrm{F}(x) = \mathbf{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 = \frac{2}{3} x^3$	*„Zahlen" mit* $\cdot$ *oder* : *„bleiben"* (Faktorregel)
6	$f(x) = x^2 \mathbf{+2}$ $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3} x^3 \boldsymbol{+2x}$	*„Zahlen" mit* + *oder* − *„erhalten ein* x*"*
7	$f(x) = x^2 - 4x$ $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3} x^3 - 2x^2$	+ *und* − *Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln aufgeleitet werden* (Summenregel)

Hinweis : Die Produktregel zum „Aufleiten" (partielle Integration) wird im Abitur nicht verlangt ($f(x) = x^2 \cdot e^x \rightarrow \mathrm{F}(x) = ?$).

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Anwendungen der Kettenregel		
8	$f(x)=(2x+3)^5$ $F(x)=\frac{1}{6}\cdot(2x+3)^6\cdot\frac{1}{2}$ $=\frac{1}{12}\cdot(2x+3)^6$ $f(x)=\frac{1}{(2x+3)^5}$ $=(2x+3)^{-5}$ $F(x)=\frac{1}{-4}\cdot(2x+3)^{-4}\cdot\frac{1}{2}$ $=-\frac{1}{8}\frac{1}{(2x+3)^4}$ Spezialfall: $f(x)=\frac{1}{(2x+3)}$ $F(x)=\ln\|2x+3\|\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)=(Klammerinhalt)^{Exponent}$ $F(x)=\frac{1}{Exponent+1}\cdot(Klammerinhalt)^{Exponent+1}\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$ Spezialfall: $f(x)=\frac{1}{(Klammerinhalt)}$ $F(x)=\ln\|Klammerinhalt\|\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
9	$f(x)=e^{2x+3}$ $F(x)=e^{2x+3}\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)=e^{Exponent}$ $F(x)=e^{Exponent}\cdot\frac{1}{Exponent\ abgeleitet}$
10	$f(x)=\sin(2x+3)$ $F(x)=-\cos(2x+3)\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)=\sin(Klammerinhalt)$ $F(x)=-\cos(Klammerinhalt)\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
11	$f(x)=\cos(2x+3)$ $F(x)=\sin(2x+3)\cdot\frac{1}{2}$	$f(x)=\cos(Klammerinhalt)$ $F(x)=\sin(Klammerinhalt)\cdot\frac{1}{Klammerinhalt\ abgeleitet}$

Hinweis : Streng genommen gilt das obige Vorgehen nur, falls der *Klammerinhalt* bzw. *Exponent* **linear** („enthält nur x, also kein x^2, e^x, ...“) ist.
Andere Funktionen müssen im Abitur jedoch auch nicht „aufgeleitet “ werden.

1. Bemerkung (Integrationskonstante)

Eine Funktion hat **nur eine** Ableitungsfunktion, aber **unendlich viele** Stammfunktionen, da der hintere Summand $\boldsymbol{c}$ (genannt: Integrationskonstante) beim Ableiten verschwindet.

Allg.: $\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 + \boldsymbol{c}$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 & \mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2 & \mathrm{F}(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3 \\
& f(x) = x^2 \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& f'(x) = 2x &
\end{tikzcd}$$

Grafische Erklärung : c verschiebt das Schaubild der Stammfunktion nur nach oben bzw. unten und ist also für die Steigung unerheblich. Deshalb haben „alle Stammfunktionen“ F dieselbe (abgeleitete) Funktion f.

2. Bemerkung („Aufleiten“ bei Funktionenscharen)

Der Parameter (t) wird beim „Aufleiten“ wie eine Zahl behandelt.

Beispiel: $f_t(x) = t^2x^3 + t$

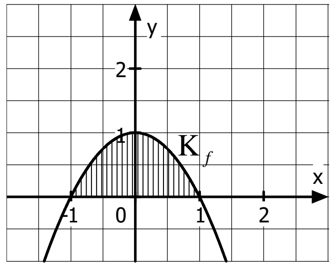
$$\mathrm{F}_t(x) = \frac{1}{4}t^2x^4 + tx$$

4.2 Flächeninhaltsberechnung zwischen Schaubild und x-Achse

1. Fläche oberhalb der x-Achse

Beispiel

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 1$.
Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?



Ansatz

$$\mathbf{A} = \int_a^b f(x)\,dx = \left[\mathbf{F}(x)\right]_a^b = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$$

Lösung

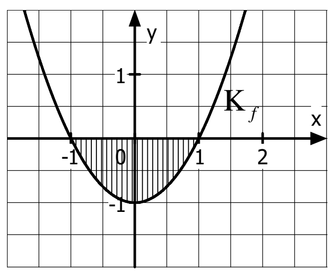
$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{3}\cdot 1^3 + 1 - \left(-\frac{1}{3}\cdot\left(-1\right)^3 + \left(-1\right)\right) \approx 1{,}333 \text{ FE}$$

Rechte Grenze nach oben, linke nach unten $\quad$ *aufleiten* $\quad$ *Rechte und linke Grenze in Stammfunktion einsetzen, voneinander subtrahieren*

Merkregel

$$\mathbf{A} = \int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} (\text{Funktionsterm})\,dx$$

2. Fläche unterhalb der x-Achse



Unterschied

$$\mathrm{A} = \int_{-1}^{1} -f(x)\,dx$$

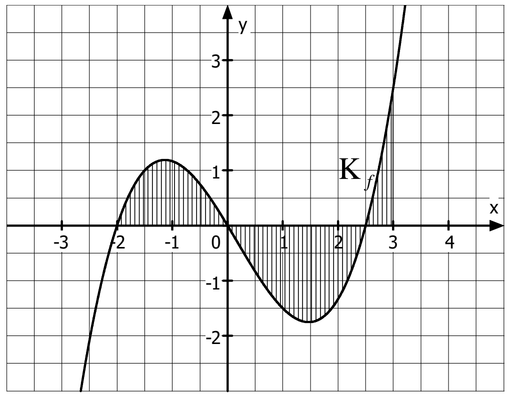
Minuszeichen beachten!
Sonst: negatives Ergebnis

Hinweis: Falls Sie versehentlich ein negatives Ergebnis erhalten, können Sie dies korrigieren, indem Sie **Betragsstriche** setzen.

3. Zusammengesetzte Fläche

Beispiel : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{3}x$. Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?

Vorgehen (am Beispiel)



1. Nullstellen bestimmen

$f(x)=0 \;\rightarrow x_1=-2;\; x_2=0;\; x_3=2,5$

2. Teilflächeninhalte bestimmen

$$A_1=\int_{-2}^{0} f(x)dx \approx 1,56;$$

$$A_2=\int_{0}^{2,5} -f(x)\;dx \approx 2,82;$$

$$A_3=\int_{2,5}^{3} f(x)\;dx \approx 0,57$$

3. Gesamtflächeninhalt bestimmen

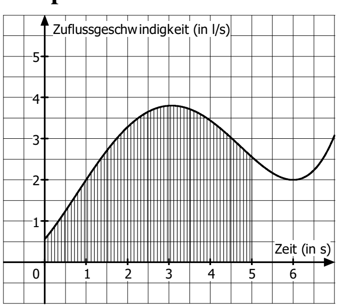
$A = A_1 + A_2 + A_3 \approx 1,56+2,82+0,57=4,95$ FE

Von Nullstelle zu Nullstelle integrieren!
Ansonsten werden positive und negative Integralwerte zu einer **„Flächenbilanz“** verrechnet.

4. Interpretation von Flächeninhalten

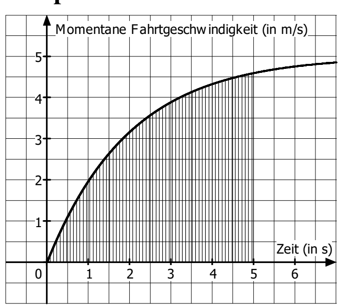
Der Inhalt der markierten Fläche gibt an …

Beispiel 1



… welche Wassermenge (in l) innerhalb von 5 s zugeflossen ist.

Beispiel 2



… welche Strecke (in m) innerhalb von 5 s zurückgelegt wurde.

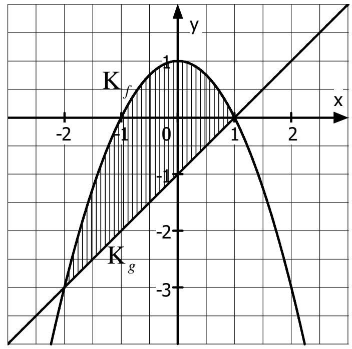
Tipp : Einheit Integral („Fläche“) = Einheit Funktion · Einheit Variable (z.B. $m=\frac{m}{s}\cdot s$)

4.3 Flächeninhaltsberechnung zwischen zwei Schaubildern

1. Einzelfläche

Beispiel

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = -x^2 + 1$ und g mit $g(x) = x - 1$.
Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?



Ansatz

$$\mathbf{A} = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

Lösung

Rechte Grenze nach oben, linke nach unten — *Oberer Funktionsterm minus unterer Funktionsterm* — *eventuell vereinfachen* — *aufleiten*

$$A = \int_{-2}^{1} \big((-x^2+1) \; - \; (x-1)\big)\,dx \;=\; \int_{-2}^{1} \big(-x^2 - x + 2\big)\,dx \;=\; \left[-\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x\right]_{-2}^{1}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 + 2\cdot 1 \; - \; \left(-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3 - \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2)\right) \;=\; 4{,}5 \text{ FE}$$

Rechte und linke Grenze in Stammfunktion einsetzen, voneinander subtrahieren

Merkregel

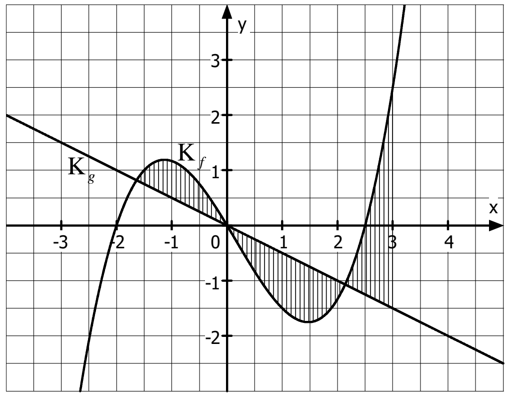
$$\mathbf{A} = \int_{\text{linke Grenze}}^{\text{rechte Grenze}} (\textbf{oberer Funktionsterm} - \textbf{unterer Funktionsterm})\; dx$$

Bemerkung (Lage zur x - Achse)

Bei einer Fläche, die zwischen zwei Schaubildern liegt, ist es hingegen völlig unerheblich, ob sich diese oberhalb oder unterhalb der x-Achse befindet.

2. Zusammengesetzte Fläche

Beispiel : Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{6}x^2-\frac{5}{3}x$ und g mit $g(x)=-0,5x$. Welchen Inhalt besitzt die schraffierte Fläche?



Vorgehen (am Beispiel)

1. Schnittstellen bestimmen

$f(x)=g(x)\ \rightarrow x_1\approx -1,64;\ x_2=0;\ x_3\approx 2,14$

2. Teilflächeninhalte bestimmen

$A_1=\int_{-1,64}^{0}\left(f(x)-g(x)\right)dx\approx 0,72;$

$A_2=\int_{0}^{2,14}\left(g(x)-f(x)\right)dx\approx 1,47;$

$A_3=\int_{2,14}^{3}\left(f(x)-g(x)\right)dx\approx 1,47$

3. Gesamtflächeninhalt bestimmen

$A=A_1+A_2+A_3\approx 0,72+1,47+1,47=3,66$ FE

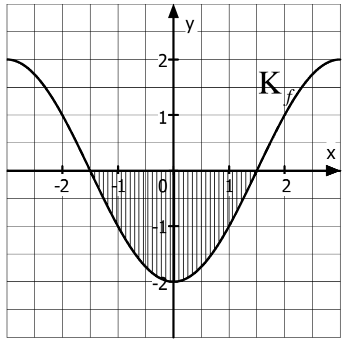
Von Schnittstelle zu Schnittstelle integrieren!

Ansonsten werden positive und negative Integralwerte zu einer **„Flächenbilanz“** verrechnet.

Beispiel

Berechnen Sie jeweils den Inhalt der schraffierten Fläche.

a) $f(x) = -2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)$



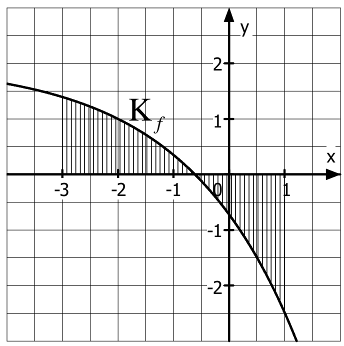
$$A = \int_{-1,5}^{1,5} \left(-f(x)\right) dx = \int_{-1,5}^{1,5} \left(-\left(-2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right)\right) dx$$

$$= \int_{-1,5}^{1,5} \left(2\cos\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right) dx = \left[2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cdot\frac{1}{\frac{\pi}{3}}\right]_{-1,5}^{1,5}$$

$$= \left[2\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\cdot\frac{3}{\pi}\right]_{-1,5}^{1,5} = \left[\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}x\right)\right]_{-1,5}^{1,5}$$

$$= \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot 1,5\right) - \left(\frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{3}\cdot(-1,5)\right)\right) \approx 1,91 - (-1,91) \approx 3,82 \text{ FE}$$

b) $f(x) = -e^{0,5x+1} + 2$



1. Nullstelle bestimmen

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 & & \\ -e^{0,5x+1} + 2 &= 0 & & |+e^{0,5x+1} \\ 2 &= e^{0,5x+1} & & |\ln(\ ) \\ \ln(2) &= 0,5x + 1 & & |-1 \\ -0,31 &\approx 0,5x & & |:0,5 \\ -0,62 &\approx x & & \end{aligned}$$

2. Teilflächeninhalte bestimmen und 3. Gesamtflächeninhalt bestimmen

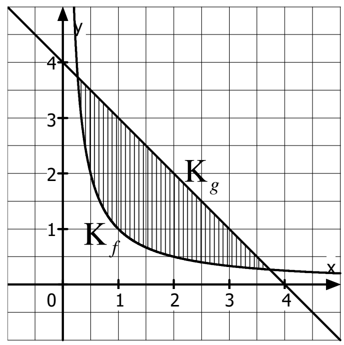
$$A \approx A_1 + A_2 \approx \int_{-3}^{-0,62} f(x)\,dx + \int_{-0,62}^{1} -f(x)\,dx$$

$$\approx \int_{-3}^{-0,62} \left(-e^{0,5x+1} + 2\right) dx + \int_{-0,62}^{1} \left(-\left(-e^{0,5x+1} + 2\right)\right) dx$$

$$\approx \left[-e^{0,5x+1}\cdot\frac{1}{0,5} + 2x\right]_{-3}^{-0,62} + \left[e^{0,5x+1}\cdot\frac{1}{0,5} - 2x\right]_{-0,62}^{1}$$

$$\approx -e^{0,5\cdot(-0,62)+1}\cdot\frac{1}{0,5}+2\cdot(-0,62)-\left(-e^{0,5\cdot(-3)+1}\cdot\frac{1}{0,5}+2\cdot(-3)\right)+$$
$$e^{0,5\cdot1+1}\cdot\frac{1}{0,5}-2\cdot1-\left(e^{0,5\cdot(-0,62)+1}\cdot\frac{1}{0,5}-2\cdot(-0,62)\right)$$
$$\approx -5,22-(-7,21)+6,96-5,22\approx 1,99+1,74\approx 3,73 \text{ FE}$$

c) $f(x)=\frac{1}{x}$ und $g(x)=-x+4$



1. Schnittstellen bestimmen

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ \frac{1}{x} &= -x+4 \qquad |\cdot x \\ 1 &= -x^2+4x \qquad |+x^2-4x \\ x^2-4x+1 &= 0 \end{aligned}$$

$$x_{1/2}=\frac{-(-4)\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} \quad \text{(abc-Formel)}$$
$$=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}\approx\frac{4\pm3,46}{2}$$
$$x_1\approx\frac{4+3,46}{2}=3,73; \qquad x_2\approx\frac{4-3,46}{2}=0,27$$

2. Teilflächeninhalte bestimmen und 3. Gesamtflächeninhalt bestimmen

$$\text{A}\approx\int_{0,27}^{3,73}\left(g(x)-f(x)\right)dx\approx\int_{0,27}^{3,73}\left(-x+4-\frac{1}{x}\right)dx$$
$$\approx\left[-\frac{1}{2}x^2+4x-\ln(x)\right]_{0,27}^{3,73}\approx-\frac{1}{2}\cdot3,73^2+4\cdot3,73-\ln(3,73)-\left(-\frac{1}{2}\cdot0,27^2+4\cdot0,27-\ln(0,27)\right)$$
$$\approx 4,29 \text{ FE}$$