2. Gleichungen

2.1 Gleichungstypen: Übersicht

	Typ 1	**Typ 2**
Gleichung 1. Grades (linear) (S. 26)	$2x-4=0$	
Gleichung 2. Grades (quadratisch) (S. 26)	$2x^2-4=0$	$2x^2-4x=0$
Gleichung 3. Grades (S. 26)	$2x^3-4=0$	$2x^3-4x=0$
Gleichung 4. Grades (S. 26)	$2x^4-4=0$	$2x^4-4x=0$
Exponentialgleichung (S. 26)	$e^x=0{,}5$ oder $e^{2x-1}=0{,}5$	$2e^{2x}-e^x=0$
Sinusgleichung (S. 30)	$\sin(x)=0{,}5$	
Kosinusgleichung (S. 30)	$\cos(x)=0{,}5$	
Merkmal	umformbar auf $\left\{\begin{matrix} x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ e^x \text{ oder } e^{\text{„nicht nur } x\text{“}} \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{matrix}\right\} = \ldots$	Alle Summanden enthalten mindestens x (bzw. $e^x/\sin(x)/\cos(x)$). Kein Summand besteht nur aus einer „Zahl“. Somit kann „etwas mit x“ ausgeklammert werden.
Lösungsvorgehen	**Gegenoperation** $\left\{\begin{matrix} : \\ \sqrt{} \\ \sqrt[3]{} \\ \sqrt[4]{} \\ \ln \\ \sin^{-1} \\ \cos^{-1} \end{matrix}\right\}$	(evtl.) Ausklammern; **Satz vom Nullprodukt** (S. 32)

Abkürzung: ... steht für eine Zahl.

Typ 3	Typ 4
$x^2 - 8x + 15 = 0$	
	$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$
	$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$
umformbar auf $\ldots x^2 + \ldots x + \ldots = 0$	$\left\{\begin{array}{ccccc} \ldots x^4 & + & \ldots x^2 & + & \ldots \\ \ldots e^{2x} & + & \ldots e^x & + & \ldots \end{array}\right\} = 0$
abc - bzw. **pq - Formel**	**Substitution führt auf** $\boldsymbol{\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0}$; abc- bzw. pq-Formel; **Rücksubstitution**

Bruchgleichung
$\dfrac{3x^2 - 6x}{x - 2} = 0$ Kein eigener Gleichungstyp: „Durchmultiplizieren" mit dem Hauptnenner führt stets auf einen der Gleichungstypen 1 bis 4. (S. 31)

Bemerkung: Eine Gleichung, die keinem dieser Gleichungstypen zuordenbar ist, kann meist nicht „von Hand" gelöst werden.

2.2 Gleichungstypen: Konkretes Lösungsvorgehen

1. Polynomgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	**Typ 2** **Satz vom Nullprodukt**	**Typ 3** **abc -** bzw. **pq - Formel**
$2x-4=0 \quad \mid +4$ $2x=4 \quad \mid :2$ $x=2$		
$2x^2-4=0 \quad \mid +4$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \mid \sqrt{}$ $x_1=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_2=-\sqrt{2}\approx -1,41$	$2x^2-4x=0$ $x\cdot(2x-4)=0$ **S. v. Nullpr.** (S. 32) $x_1=0 \qquad 2x-4=0$ $2x=4$ $x_2=2$	$x^2-8x+15=0$ mit **abc - Formel**: $(a=1;\ b=-8;\ c=15)$ $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ $=\dfrac{8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 15}}{2}$ $=\dfrac{8\pm 2}{2}$ $x_1=5; \qquad x_2=3$ oder mit **pq - Formel**: $x_{1/2}=-\dfrac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\dfrac{p}{2}\right)^2-q}$ (*Bei dieser Formel muss vor dem* x^2 *stets eine* $+1$ *stehen!*)
$2x^3-4=0$ $2x^3=4$ $x^3=2 \quad \mid \sqrt[3]{}$ $x=\sqrt[3]{2}$ $x\approx 1,26$	$2x^3-4x=0$ $x\cdot(2x^2-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $x_1=0 \qquad 2x^2-4=0$ $2x^2=4$ $x^2=2 \quad \mid \sqrt{}$ $x_2=\sqrt{2}\approx 1,41$ $x_3=-\sqrt{2}\approx -1,41$	

Typ 1 **Gegenoperation**	Typ 2 **Satz vom Nullprodukt**	Typ 4 **Substitution führt zu** $\boldsymbol{\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0}$
$2x^4 - 4 = 0 \quad \mid +4$ $2x^4 = 4 \quad \mid :2$ $x^4 = 2 \quad \mid \sqrt[4]{\ }$ $x_1 = \sqrt[4]{2} \approx 1{,}19$ $x_2 = -\sqrt[4]{2} \approx -1{,}19$	$2x^4 - 4x = 0$ $x \cdot \left(2x^3 - 4\right) = 0$ **S. v. Nullpr.** $x_1 = 0 \qquad 2x^3 - 4 = 0$ $2x^3 = 4$ $x^3 = 2$ $x_2 = \sqrt[3]{2}$ $x_2 \approx 1{,}26$	$x^4 - 8x^2 + 15 = 0$ **Substitution :** $\left(x^4 = u^2;\ \ x^2 = u\right)$ $u^2 - 8u + 15 = 0$ $u_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ (abc-Formel) $= \dfrac{8 \pm 2}{2}$ $u_1 = 5; \qquad u_2 = 3$ **Rücksubstitution :** $x^2 = 5 \qquad x^2 = 3$ $x_1 = \sqrt{5} \approx 2{,}34 \qquad x_3 = \sqrt{3} \approx 1{,}73$ $x_2 = -\sqrt{5} \approx -2{,}34 \qquad x_4 = -\sqrt{3} \approx -1{,}73$

2. Exponentialgleichungen

Typ 1 **Gegenoperation**	Typ 2 **Satz vom Nullprodukt**	Typ 4 **Substitution führt zu** $\boldsymbol{\ldots u^2 + \ldots u + \ldots = 0}$
$e^x = 0{,}5 \quad \mid \ln$ $x = \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$ oder $e^{2x-1} = 0{,}5 \quad \mid \ln$ $2x - 1 = \ln(0{,}5) \quad \mid +1$ $2x = \ln(0{,}5) + 1 \quad \mid :2$ $x = \dfrac{\ln(0{,}5) + 1}{2}$ $x \approx 0{,}153$	$2e^{2x} - e^x = 0$ $e^x \cdot (2e^x - 1) = 0$ **S. v. Nullpr.** $e^x = 0 \qquad 2e^x - 1 = 0$ $x = \ln(0) \qquad e^x = 0{,}5$ keine Lösung $\qquad x = \ln(0{,}5)$ $x \approx -0{,}69$	$e^{2x} - 8e^x + 15 = 0$ **Substitution :** $\left(e^{2x} = u^2;\ \ e^x = u\right)$ $u^2 - 8u + 15 = 0$ $u_{1/2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 15}}{2}$ (abc-F.) $= \dfrac{8 \pm 2}{2}$ $u_1 = 5; \qquad u_2 = 3$ **Rücksubstitution :** $e^x = 5 \qquad e^x = 3$ $x_1 = \ln(5) \approx 1{,}6 \qquad x_2 = \ln(3) \approx 1{,}1$

3. Trigonometrische Gleichungen

Vorgehen und Erklärung am Beispiel

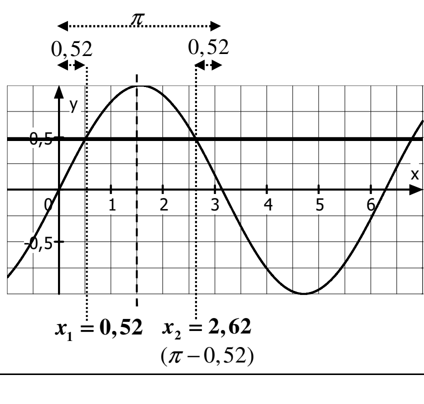
Sinusgleichung $\sin(x) = 0{,}5$	**Kosinusgleichung** $\cos(x) = 0{,}5$

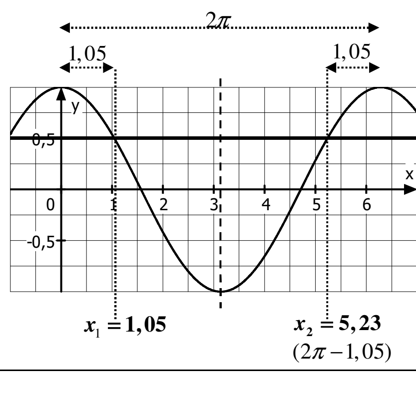
1. Schritt : x_1 durch WTR (Einstellung: *rad*)	
$\sin(x) = 0{,}5 \quad \mid \sin^{-1}$ $x = \sin^{-1}(0{,}5)$ $x_1 = \frac{1}{6}\pi \approx 0{,}52$	$\cos(x) = 0{,}5 \quad \mid \cos^{-1}$ $x = \cos^{-1}(0{,}5)$ $x_1 = \frac{1}{3}\pi \approx 1{,}05$

2. Schritt : x_2 aus x_1 berechnen	
$x_2 = \boldsymbol{\pi} - x_1 \approx \boldsymbol{\pi} - 0{,}52 \approx 2{,}62$	$x_2 = \boldsymbol{2\pi} - x_1 \approx \boldsymbol{2\pi} - 1{,}05 \approx 5{,}23$

Erklärung

In den unten stehenden Koordinatensystemen werden die Gleichungen $\sin(x) = 0{,}5$ und $\cos(x) = 0{,}5$ veranschaulicht.
Jeder *x*-Wert, welcher eine Lösung der Gleichung $\sin(x) = 0{,}5$ darstellt, muss bei der Kurve zu einem Punkt mit *y*-Wert 0,5 führen. Bei $x_1 \approx 0{,}52$, der ersten Lösung der Gleichung, erreicht die Kurve einen Punkt mit diesem *y*-Wert. Bevor die Kurve bei $x = \pi$ die *x*-Achse durchquert, erreicht es jedoch abermals, beim gesuchten *x*-Wert x_2, einen Punkt mit dem *y*-Wert $0{,}5$.
Aufgrund der Achsensymmetrie des Schaubildes muss der Abstand zwischen x_2 und π dem Abstand zwischen 0 und x_1 entsprechen und damit x_1 bzw. 0,52 betragen.
Hierdurch kann x_2 errechnet werden: $x_2 = \boldsymbol{\pi} - x_1 \approx \boldsymbol{\pi} - 0{,}52 \approx 2{,}62$.
Im Unterschied hierzu führt die Achsensymmetrie des Schaubildes der Kosinusfunktion dazu, dass x_2 errechnet werden kann, indem x_1 von 2π subtrahiert wird: $x_2 = \boldsymbol{2\pi} - x_1$.

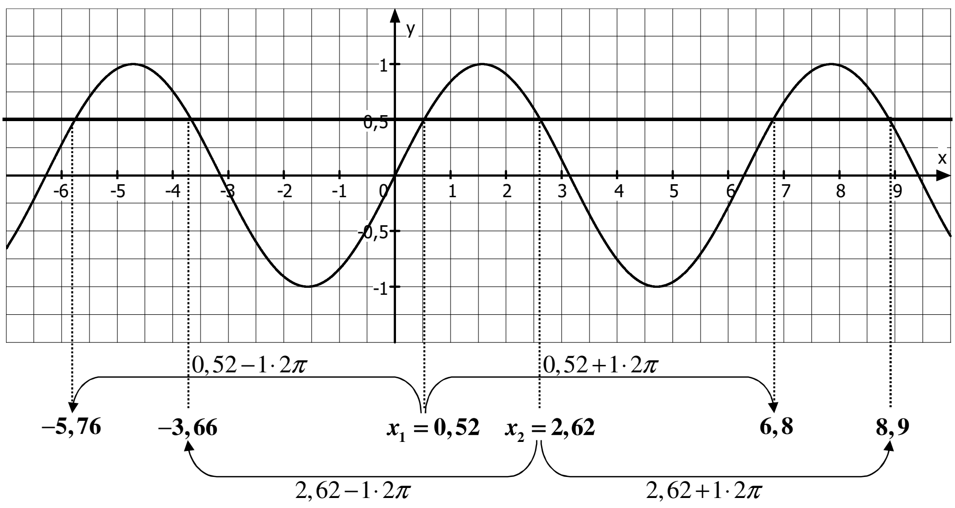




3. Schritt : Weitere Lösungen der Gleichung berechnen	
$x \approx 0{,}52 \pm 1 \cdot 2\pi;\quad x \approx 0{,}52 \pm 2 \cdot 2\pi;\ \ldots$ und $x \approx 2{,}62 \pm 1 \cdot 2\pi;\quad x \approx 2{,}62 \pm 2 \cdot 2\pi;\ \ldots$	$x \approx 1{,}05 \pm 1 \cdot 2\pi;\quad x \approx 1{,}05 \pm 2 \cdot 2\pi;\ \ldots$ und $x \approx 5{,}23 \pm 1 \cdot 2\pi;\quad x \approx 5{,}23 \pm 2 \cdot 2\pi;\ \ldots$

Erklärung (Am Beispiel: $\sin(x) = 0{,}5$)

Das Schaubild einer Sinus- oder Kosinusfunktion besitzt eine Periodenlänge von 2π ($\approx$ 6,3). Nach dem Durchlaufen einer Periode wiederholt sich stets ihr Ablauf.
Die Sinuskurve erreicht beim x-Wert von 0,52 einen Punkt mit y-Wert 0,5.
Eine Periode „später“, beim x-Wert von $0{,}52 + 1 \cdot 2\pi$ ($\approx$ 6,8) erreicht die Kurve jedoch ebenfalls einen Punkt mit diesen y-Wert.
Ebenso gelangt man zu einer weiteren Lösung, indem man beispielsweise 4 Periodenlängen subtrahiert und beim x-Wert $0{,}52 - 4 \cdot 2\pi \approx -24{,}61$ landet.
Insgesamt gesehen erhält man aus den beiden Basislösungen $x_1 \approx 0{,}52$ und $x_2 \approx 2{,}62$ alle weiteren Lösungen, indem man zu diesen schlicht eine beliebige Anzahl von Periodenlängen (2π) addiert oder subtrahiert.



Konkretes Lösungsvorgehen bei trigonometrischen Gleichungen

Das Vorgehen zur Lösung von Sinus- und Kosinusgleichungen erfolgt weitgehend analog. Ein grundsätzlicher Unterschied besteht lediglich im 2. Schritt bei der Berechung von x_2. Deshalb werden hier die verschiedenen Gleichungstypen nur anhand von Sinusgleichungen dargestellt.

Sinusgleichung **Typ 1** **Gegenoperation**	**Kosinusgleichung** **Typ 1** **Gegenoperation**
$\sin(x) = 0,5 \quad \mid \sin^{-1}$ $x = \sin^{-1}(0,5)$ $x_1 = \frac{1}{6}\pi$ (WTR) $x_2 = \pi - x_1 = \pi - \frac{1}{6}\pi = \frac{5}{6}\pi$ weitere Lösungen: $x = \frac{1}{6}\pi \pm 1 \cdot 2\pi; \quad x = \frac{1}{6}\pi \pm 2 \cdot 2\pi; \quad ...$ und $x = \frac{5}{6}\pi \pm 1 \cdot 2\pi; \quad x = \frac{5}{6}\pi \pm 2 \cdot 2\pi; \quad ...$	$\cos(x) = 0,5 \quad \mid \cos^{-1}$ $x = \cos^{-1}(0,5)$ $x_1 = \frac{1}{3}\pi$ (WTR) $x_2 = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{1}{3}\pi = \frac{5}{3}\pi$ weitere Lösungen: $x = \frac{1}{3}\pi \pm 1 \cdot 2\pi; \quad x = \frac{1}{3}\pi \pm 2 \cdot 2\pi; \quad ...$ und $x = \frac{5}{3}\pi \pm 1 \cdot 2\pi; \quad x = \frac{5}{3}\pi \pm 2 \cdot 2\pi; \quad ...$

Einziger Unterschied

Sinusgleichung: $\boldsymbol{x_2 = \pi - x_1}$

Kosinusgleichung: $\boldsymbol{x_2 = 2\pi - x_1}$

Hinweis : Bei Kosinusgleichungen ebenfalls möglich: $\boldsymbol{x_2 = -x_1}$

4. Bruchgleichungen

Beispiel 1

$$\frac{3x^2-6x}{x-2}=0$$

1. Definitionsmenge bestimmen („Nenner = 0")

$$x-2=0 \quad |+2$$
$$x=2$$

$D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ (alle reellen Zahlen außer 2)

2. Lösen der Gleichung

$$\frac{3x^2-6x}{x-2}=0 \quad |\cdot(x-2)$$
$$3x^2-6x=0$$
$$x\cdot(3x-6)=0$$

S. v. Nullpr.

$$x_1=0 \qquad 3x-6=0 \quad |+6$$
$$3x=6 \quad |:2$$
$$x_2=2$$

3. Lösungsmenge notieren

$L=\{0\}$

($x_2=2$ nicht, da nicht in D)

Beispiel 2

$$\frac{x+1}{x}=\frac{-x}{x-1}$$

1. Definitionsmenge bestimmen

$$x=0 \quad \text{bzw.} \quad x-1=0 \quad |+1$$
$$x=1$$

$D=\mathbb{R}\setminus\{0;\,1\}$

2. Lösen der Gleichung

$$\frac{x+1}{x}=\frac{-x}{x-1} \quad |\cdot x\cdot(x-1)$$
$$(x+1)\cdot(x-1)=-x\cdot x$$
$$x^2-1=-x^2 \quad |+1+x^2$$
$$2x^2=1$$
$$x^2=\frac{1}{2} \,|\sqrt{\ }$$
$$x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\approx\pm 0{,}707$$

3. Lösungsmenge notieren

$$L=\left\{-\sqrt{\frac{1}{2}};\,\sqrt{\frac{1}{2}}\right\}$$

Hinweise

- „Durchmultiplizieren" mit dem Hauptnenner führt stets auf einen der bekannten Gleichungstypen 1 bis 4. Deshalb stellen Bruchgleichungen selbst auch keinen „eigenen Gleichungstyp" dar.
- x-Werte, welche im Nennerterm der Ausgangsgleichung zu einem Wert von 0 führen, gehören nicht zur Definitionsmenge der Gleichung und dürfen damit nicht in diese eingesetzt werden (da man sonst durch 0 teilen würde). Ein solcher x-Wert kann demnach auch nicht Lösung der Gleichung sein (siehe Beispiel 1).
- Die **Überprüfung der Lösung (3. Schritt)** ist **nicht relevant für das Abitur**.

Bruchgleichungen

Eine Nullstelle des Nenners kann nicht Lösung sein.

2.3 Goldene Regeln zum Lösen von Gleichungen

1. Regel: Der Satz vom Nullprodukt als wichtiges Werkzeug

- **Wozu?**

Eine schwierige Gleichung kann hiermit in zwei (oder mehr) einfache Gleichungen zerlegt werden.

- **Beispiel :** $e^{2x}x^2 - 2x^2 = 0 \quad (\textit{schwierige Gleichung})$

$$\underline{x^2 \quad \cdot \quad (e^{2x} - 2) \quad = 0}$$

S. v. Nullpr.

$(\textit{einfache Gl.})$

$$x^2 = 0 \qquad |\sqrt{\ }$$
$$x_{1/2} = 0$$

$(\textit{einfache Gl.})$

$$e^{2x} - 2 = 0 \qquad |+2$$
$$e^{2x} = 2 \qquad |\ln$$
$$2x = \ln(2) \qquad |:2$$
$$x_3 = \frac{\ln(2)}{2}$$

- **Wann anwendbar?**

Wenn eine Gleichung in der Form: $\underline{\text{Faktor 1} \cdot \text{Faktor 2} \cdot \ldots = 0}$ gegeben ist, oder durch Ausklammern auf diese Form gebracht werden kann. Die Gleichung sollte also insbesondere kein Absolutglied („keine Zahl ohne x“) enthalten.

„Mischgleichungen“ wie $e^x x^2 - 2x^2 = 0$, die beispielsweise sowohl Polynombausteine (x^2) als auch Exponentialbausteine (e^x) enthalten, können in der Regel nur über den Satz vom Nullprodukt von Hand gelöst werden.

- **Weshalb gilt der Satz vom Nullprodukt?**

Wenn zwei Zahlen multipliziert werden, sodass das Ergebnis die Zahl 0 ist, kann dies nur gelingen, wenn die eine oder die andere der beiden Zahlen selbst 0 ist.
(*Oder haben Sie ein Gegenbeispiel?*)
Übertragen auf die obige Gleichung $x^2 \cdot (e^{2x} - 2) = 0$ kann das Produkt aus x^2 und $(e^{2x} - 2)$ nur dann zu 0 werden, wenn entweder x^2 oder $(e^{2x} - 2)$ den Wert 0 annimmt. Deshalb werden alle x-Werte berechnet, die mindestens einen dieser beiden Faktoren zu 0 machen.

2. Regel: Das Teilen durch x ist VERBOTEN

- **Falsch:**

$$\begin{aligned} 4x^2 &= x \quad &|: x \\ 4x &= 1 \quad &|: 4 \\ x &= 0{,}25 \end{aligned}$$

- **Grund:** $x_2 = 0$ ist eine weitere Lösung dieser Gleichung (Probe!), diese ging jedoch im Lösungsvorgang „verloren", da durch x geteilt wurde.

- **Stattdessen: Satz vom Nullprodukt**

$$\begin{aligned} 4x^2 &= x \quad &|-x \\ 4x^2 - x &= 0 \\ x \cdot (4x-1) &= 0 \end{aligned}$$

S. v. Nullpr.

$$x_1 = 0 \qquad \begin{aligned} 4x-1 &= 0 \quad &|+1 \\ 4x &= 1 \quad &|: 4 \\ x_2 &= 0{,}25 \end{aligned}$$

- **Bemerkung:** Hingegen ist das Teilen durch e^x erlaubt (da $e^x \neq 0$).

3. Regel: Gleichungen mit einem Parameter

- Eine Gleichung löst man immer nach der Variablen (x) auf, niemals nach dem Parameter (t).
- Der Parameter wird hingegen wie eine Zahl behandelt.
- Zu welchem Typ eine Gleichung gehört, hängt nur von der Variablen, nicht vom Parameter ab. Beispiel: $t^3 - t^2 \cdot \sin(x) + 1 = 0 \;\rightarrow$ Trigonometrische Gleichung!