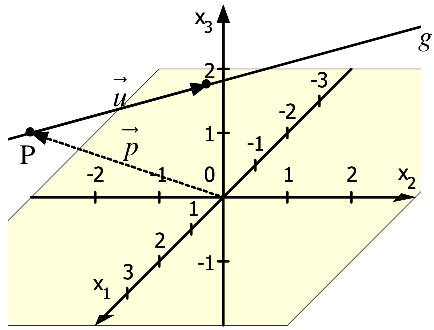
2. Geraden

2.1 Geradengleichungen in Parameterform

Die Punkt-Richtungs-Form:

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunktes P)
- $\vec{u}$: Richtungsvektor
- r: Parameter (mit $r \in \mathbb{R}$)



Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

Spezielle Geraden: z.B. x_1-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; x_3-Achse: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Elementare Aufgabenstellungen

- **Geradenpunkte ermitteln**

Beispiel: Bestimmung eines Punktes auf $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$).

Einsetzen eines beliebigen Wertes für r (z.B. $r = 2$):

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{D}(1|3|3).$$

- **Überprüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt (Punktprobe)**

Beispiel: Liegt $\mathrm{Q}(0|8|4)$ auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)?

Der Ortsvektor von Q wird für $\vec{x}$ eingesetzt, man erhält ein LGS.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 2{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 0 = 2 - 0{,}5r \Leftrightarrow r = 4 \\ 8 = -2 + 2{,}5r \Leftrightarrow r = 4 \\ 4 = 2 + 0{,}5r \Leftrightarrow r = 4 \end{array}$$

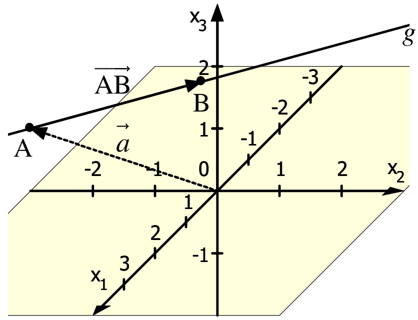
LGS ist eindeutig lösbar, somit liegt Q auf der Geraden.
(Bei verschiedenen Ergebnissen für r (Widerspruch) liegt der Punkt nicht auf der Geraden.)

Aufstellen einer Geradengleichung aus zwei Punkten

Zwei-Punkte-Form:

$\boldsymbol{g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB}}$ (mit $r \in \mathbb{R}$)

- $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, der Ortsvektor des Punktes A, wird als Stützvektor verwendet
- $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, der Verbindungsvektor der Punkte A und B, bildet den Richtungsvektor
- r: Parameter (mit $r \in \mathbb{R}$)



Beispiel: Gerade durch $A(2|-2|2)$ und $B(1,5|0,5|2,5)$.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1,5-2 \\ 0,5-(-2) \\ 2,5-2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} \text{ (mit } r \in \mathbb{R})$$

Hinweis: Die Gleichung einer Geraden ist nicht eindeutig. Durch „Vertauschen“ der Punkte erhält man eine „zahlenmäßig andere“ Gleichung (derselben Geraden):

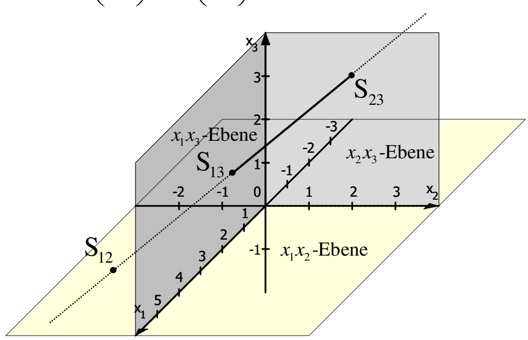
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ -2,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \text{ (mit } r \in \mathbb{R})$$

Spurpunkte ermitteln (Schnittpunkte einer Geraden mit den Koordinatenebenen)

Beispiel: Berechnen des Schnittpunktes von $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit der x_2x_3-Ebene.

Da der gesuchte Schnittpunkt in der x_2x_3-Ebene liegt, hat seine x_1-Koordinate den Wert 0
$S_{x_2x_3}(0|...|...)$.
Dies wird in die Geradengleichung für x_1 eingesetzt: $0 = 3 - 3r \rightarrow r = 1$.
Nun wird $r = 1$ eingesetzt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow S_{23}(0|2|3)$$



Beachten Sie: Für den Schnittpunkt mit der $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x_1x_2}\textbf{-Ebene} \\ \boldsymbol{x_1x_3}\textbf{-Ebene} \\ \boldsymbol{x_2x_3}\textbf{-Ebene} \end{matrix}\right\}$ wird $\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x_3 = 0} \\ \boldsymbol{x_2 = 0} \\ \boldsymbol{x_1 = 0} \end{matrix}\right\}$ gesetzt.

2.2 Gegenseitige Lage von Geraden

Beispiel 1

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\9\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$$

Beispiel 2

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$$

Vorgehen

<table>
<tr><td colspan="2">Schritt 1: Gleichsetzen.</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\9\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$</td><td>$\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Schritt 2: LGS in r und s ordnen.</td></tr>
<tr><td>$\begin{array}{rcl} 1+2r &=& 3+s \\ -5+r &=& 1+3s \\ 5+r &=& 9+2s \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rcll} 2r-s &=& 2 & (1) \\ r-3s &=& 6 & (2) \\ r-2s &=& 4 & (3) \end{array}$</td><td>$\begin{array}{rcl} 1+r &=& 2+4s \\ 2+2r &=& 2+8s \\ 0+r &=& 2+4s \end{array} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{rcll} r-4s &=& 1 & (1) \\ 2r-8s &=& 0 & (2) \\ r-4s &=& 2 & (3) \end{array}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Schritt 3: LGS aus zwei (beliebig) ausgewählten Gleichungen mit dem Gauß-Verfahren lösen. Mit der Lösung dann eine Probe in der verbliebenen Gleichung durchführen.</td></tr>
<tr><td>LGS aus den Gleichungen (2) und (3):
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 6 \\ 1 & -2 & 4 \end{array}\right)$ ↵−
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{array}\right)$
Man erhält $\boldsymbol{s=-2}$.
Einsetzen: $r-3\cdot(-2)=6 \Leftrightarrow \boldsymbol{r=0}$.

Probe in (1): $2\cdot 0-(-2)=2 \Leftrightarrow 2=2$

Das LGS hat also eine eindeutige Lösung.</td><td>LGS aus den Gleichungen (1) und (3):
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{array}\right)$ ↵−
$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

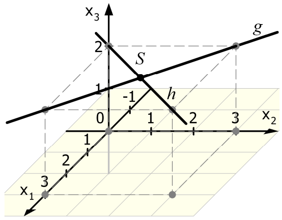
($0=-1$ Widerspruch)

Das LGS hat also keine Lösung.</td></tr>
</table>

Schritt 4: Interpretation anhand der nachfolgenden **Übersicht**.

LGS hat **eindeutige Lösung**.

Geraden **schneiden sich** in einem Punkt.



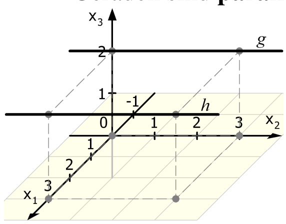
LGS hat **keine Lösung**.

↓

Sind die Richtungsvektoren Vielfache voneinander?

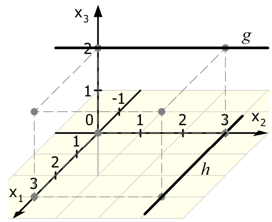
ja

Geraden sind **parallel**.



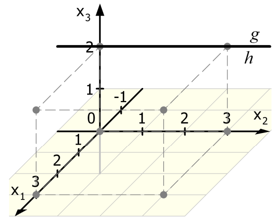
nein

Geraden sind **windschief**.



LGS hat **unendlich viele Lösungen**.

Geraden sind **identisch**.



zurück zu Beispiel 1: Die beiden Geraden **schneiden** sich also in einem Punkt.	zurück zu Beispiel 2: Die beiden Geraden sind also **parallel oder windschief**.

Eventuell Schritt 5: Ergebnisabhängige weitere Berechnungen.	
Berechnung der Koordinaten des **Schnittpunktes** durch Einsetzen von $r=0$ in g (oder $s=-2$ in h): $\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\\5\end{pmatrix}\rightarrow S(1\mid-5\mid5)$	Es gilt: $\begin{pmatrix}4\\8\\4\end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ Die beiden Richtungsvektoren sind (skalare) **Vielfache** voneinander. Somit liegen die Geraden **parallel** zueinander.

„Abkürzung“

Wird gleich zu Beginn erkannt, dass die **Richtungsvektoren Vielfache** voneinander sind (Beispiel 2), so sind die Geraden entweder **parallel** oder **identisch**.

Befindet sich der Stützpunkt der einen Geraden auf der anderen Geraden (**Punktprobe** mit Stützvektor), so sind die Geraden identisch. Ansonsten sind sie parallel.