1.7 Funktionenscharen

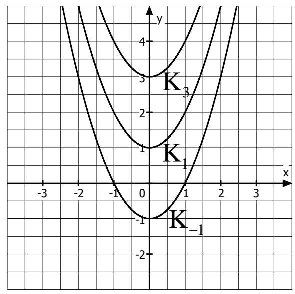
1. Begriffserklärung

Eine Funktionenschar besteht aus vielen einzelnen Funktionen, welche durch eine gemeinsame Schargleichung $f_t(x)$ beschrieben werden können.
Man erhält eine bestimmte Funktion aus der Schar, indem man „ihren“ t-Wert (ihren Parameterwert) in $f_t(x)$ einsetzt.

Beispiel

Gleichung der Funktionenschar: $f_t(x) = x^2 + t \quad (t \in \mathbb{R})$

Einzelne Funktionen hieraus (z.B):
$t = 1$: $f_1(x) = x^2 + 1$
$t = 3$: $f_3(x) = x^2 + 3$
$t = -1$: $f_{-1}(x) = x^2 - 1$
...

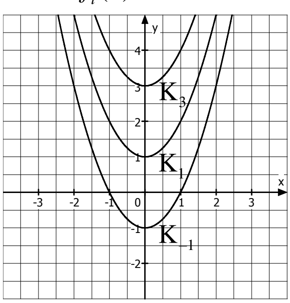


2. Wirkung des Parameters auf die Schaubilder

Wenn eine bestimmte Funktion aus der Schar ausgewählt wird, geschieht dies, indem deren t-Wert in die Schargleichung eingesetzt wird (s.o.). Durch das Einsetzen dieser Zahl bildet sich der spezielle Funktionsterm der ausgewählten Funktion, der sich von allen anderen Funktionen der Schar unterscheidet.
Ebenso unterscheidet sich das Schaubild der ausgewählten Funktion von allen anderen Schaubildern der Schar. Die Art dieses Unterschiedes wird von der Position bestimmt, an welcher der Parameter in der Schargleichung steht.

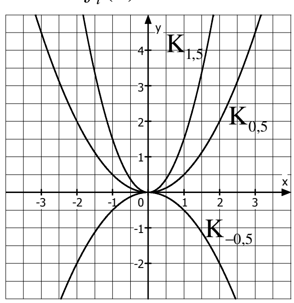
Beispiele

$f_t(x) = x^2 + t$



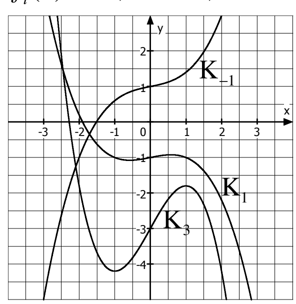
Parameter verschiebt die Schaubilder nach oben bzw. unten

$f_t(x) = tx^2$



Parameter verändert den Verlauf und die Streckung des Schaubildes in y - Richtung

$f_t(x) = -0,2tx^3 + 0,2t^2x - t$



Parameter besitzt eine komplexe Wirkung (u.a. auf Verlauf, Verschiebung, Streckung, ...)

3. Umgang mit Funktionenscharen

Dieser ist deutlich schwieriger als der Umgang mit Funktionen, was vor allem an den nachfolgenden Punkten liegt. Diese sollten beachtet werden.

	Funktion $f(x)$	**Funktionenschar $f_t(x)$**
Schaubilder	ein konkretes Schaubild	unendlich viele Schaubilder
Gleichungen	enthalten nur die Variable x: z.B.: $x^2-2=0$	enthalten weiteren „Buchstaben“: z.B.: $x^2-2t=0$
Interpretation der Ergebnisse	z.B. Schnittpunkt mit x-Achse: $N(2\|0)$; Konkreter Punkt im Koordinatensystem	z.B. Schnittpunkt mit x-Achse: $N_t(2t-1\|0)$; Parameterabhängige „Vorschrift“, die erst durch das Einsetzen von einem t-Wert zu einem konkreten Punkt führt

4. Grundregel für das Rechnen mit Funktionenscharen

Rechnungen mit Funktionenscharen werden meist zunächst allgemein, also ohne das Einsetzen einer Zahl für t, durchgeführt. Dies hat den Vorteil, dass so die Rechenergebnisse für alle Funktionen aus der Schar gelten.
Erst in diese Rechenergebnisse wird dann eine Zahl für t eingesetzt, um ein konkretes Ergebnis für eine einzelne Funktion aus der Schar zu erhalten.
Der Parameter t ist somit lediglich ein „Platzhalter“ für eine einzusetzende Zahl. Deshalb lautet die Grundregel für das Rechnen mit Funktionenscharen:

Grundregel	**Der Parameter (t) wird beim „Rechnen“ stets selbst wie eine Zahl behandelt!**

1.8 Symmetrie zur *y*-Achse bzw. zum Ursprung

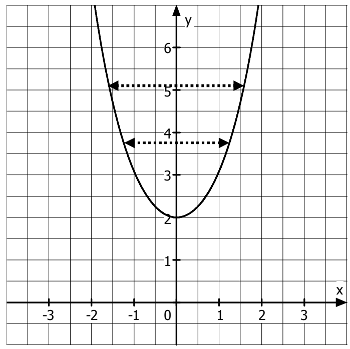
Bei **ganzrationalen Funktionen** kann anhand der **Hochzahlen** (nur **gerade** bzw. **ungerade** Hochzahlen oder gemischt) entschieden werden, ob ein gegebenes Schaubild symmetrisch zur *y*-Achse bzw. zum Ursprung ist, oder ob keine dieser beiden Symmetriearten vorliegt.

Bei **anderen Funktionstypen** müssen hingegen die **allgemeinen Bedingungen** zur Symmetrieuntersuchung verwendet werden.

1. Allgemeine Bedingung für Achsensymmetrie zur *y*-Achse: $f(-x) = f(x)$

Bedingung in Worten

An den Stellen x und $-x$ sind die *y*-Werte gleich groß.



Beispiel

Ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{-x} + e^{x}$ achsensymmetrisch zur *y*-Achse?

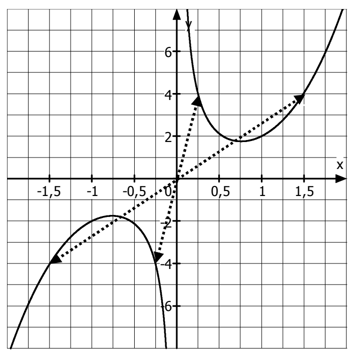
$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = e^{-(-x)} + e^{-x} = \underline{e^{x} + e^{-x}} \\ f(x) = \underline{e^{-x} + e^{x}} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Es gilt:} \\ f(-x) = f(x)\end{array}$$

$\Rightarrow$ Somit symmetrisch zur *y*-Achse!

2. Allgemeine Bedingung für Punktsymmetrie zum Ursprung: $f(-x) = -f(x)$

Bedingung in Worten

An den Stellen x und $-x$ haben die *y*-Werte den gleichen „Zahlenwert", jedoch mit verschiedenen Vorzeichen.
Mit dem Minuszeichen vor $f(x)$ sind die Werte gleich.



Beispiel

Ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ punktsymmetrisch zum Ursprung?

$$\left.\begin{array}{l} f(-x) = (-x)^3 + \frac{1}{-x} = \underline{-x^3 - \frac{1}{x}} \\ -f(x) = -\left(x^3 + \frac{1}{x}\right) = \underline{-x^3 - \frac{1}{x}} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Es gilt:} \\ f(-x) = -f(x)\end{array}$$

$\Rightarrow$ Somit punktsymmetrisch zum Ursprung!

1.9 Umgang mit Funktionen: Rechenansätze

Aufgabenstellung	Rechenansatz	
y-Wert bei $x = 2$?	$\boldsymbol{f(2)} = ...$	(x - *Wert einsetzen, ausrechnen*)
Schnittpunkt mit y-Achse?	$\boldsymbol{f(0)} = ...$	(*0 für x einsetzen, ausrechnen*)
x-Wert bei $y = 5$?	$\boldsymbol{f(x) = 5}$	($f(x)$ *gleich* y - *Wert setzen, Gleichung lös.*)
Schnittpunkt mit x-Achse?	$\boldsymbol{f(x) = 0}$	($f(x)$ *gleich 0 setzen, Gleichung lösen*)
Liegt P(2|3) auf K_f?	$\boldsymbol{f(2) = 3}$	(Punktprobe: x - *und* y - *Wert einsetzen*)
Schnittpunkt von K_f mit K_g?	$\boldsymbol{f(x) = g(x)}$	(*gleichsetzen, Gleichung lösen*)