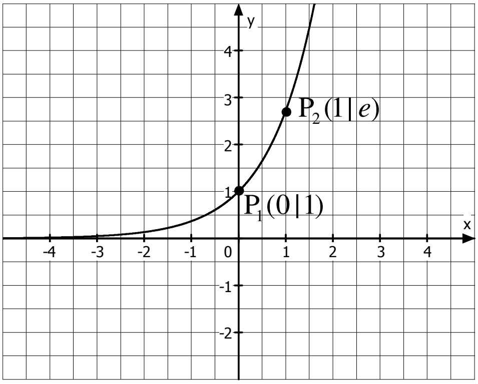
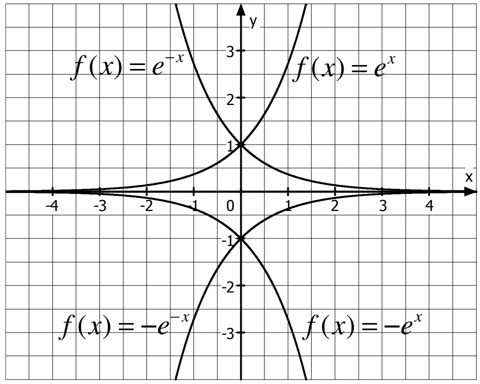
1.4 Exponentialfunktionen

1. Verlauf: $f(x) = e^x$



2. Spiegelungen



3. Koeffizienten in: $f(x) = a \cdot e^{b \cdot (x-c)} + d$

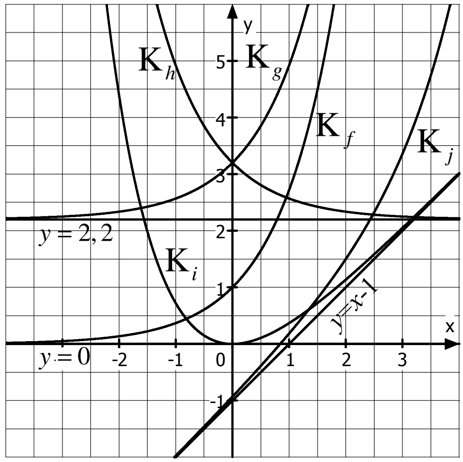
a **- Streckung / Stauchung in *y*-Richtung**	$a > 1$: „steiler“ $0 < a < 1$: „flacher“ ($a < 0$: an der x-Achse gespiegelt)
b **- ansteigendes oder fallendes Schaubild**	$b > 0$: ansteigendes Schaubild $b < 0$: fallendes Schaubild (bzw. an der y-Achse gespiegelt)
c **- Verschiebung in *x*-Richtung**	$c > 0$: nach rechts $c < 0$: nach links
d **- Verschiebung in *y*-Richtung** ($y = d$ ist Asymptote)	$d > 0$: nach oben $d < 0$: nach unten

Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x) = e^{x-3}$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat hier den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x) = e^{x+2}$: Verschiebung um 2 nach *links*!

4. **Asymptoten** (Näherungsgeraden)

Beispielfunktion	**Asymptote**	**Schaubilder**
$f(x) = e^x$	$y = 0$ (x – Achse) für $x \to -\infty$	
$g(x) = e^x + 2,2$	$y = 2,2$ für $x \to -\infty$	
$h(x) = e^{-x} + 2,2$	$y = 2,2$ für $x \to +\infty$	
$i(x) = e^{-x} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \to +\infty$	
$j(x) = 0,5e^{x-2} + x - 1$	$y = x - 1$ für $x \to -\infty$	

1. Regel (Asymptotengleichung): $\boldsymbol{y =}$**„Exponentialgleichung ohne** $\boldsymbol{e^{...x}}$**“**
Man erhält die Asymptotengleichung, indem man die Gleichung der Exponentialfunktion schlicht übernimmt, jedoch hierbei auf den Summanden im Funktionsterm, der $e^{...x}$ enthält (dieser strebt gegen 0), verzichtet.

2. Regel (Annäherungsrichtung): Bei $\boldsymbol{e^{„+x“}}$ **für** $\boldsymbol{x \to -\infty}$ bzw. **bei** $\boldsymbol{e^{„-x“}}$ **für** $\boldsymbol{x \to +\infty}$
Die Annäherungsrichtung wird durch den Summanden im Funktionsterm, der $e^{...x}$ enthält, festgelegt: Steht vor dem x im Exponenten ein Pluszeichen, so nähert sich das Schaubild für große negative x-Werte („links“ im Koordinatensystem) der Asymptote an.
Steht hier hingegen ein Minuszeichen, so findet die Annäherung bei großen positiven x-Werten („rechts“ im Koordinatensystem) statt.

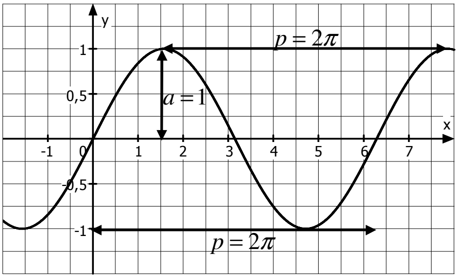
5. Anwendungen

Wachstumsvorgänge werden oft mit dem Typ $f(x) = e^{„+x“}$ modelliert, Zerfallsvorgänge hingegen mit $f(x) = e^{„-x“}$.

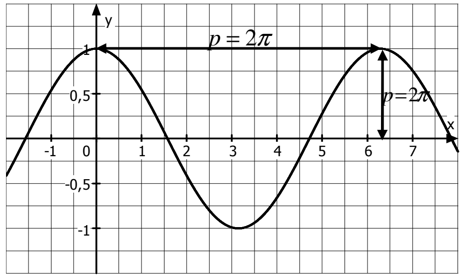
1.5 Trigonometrische Funktionen

1. Verlauf

$\boldsymbol{f(x)=\sin(x)}$



$\boldsymbol{f(x)=\cos(x)}$



2. Koeffizienten: $\boldsymbol{f(x)=a\cdot\sin\big(b\cdot(x-c)\big)+d}$ und $\boldsymbol{f(x)=a\cdot\cos\big(b\cdot(x-c)\big)+d}$

a **- Amplitude**
($|a|$, also „Zahl a ohne Vorzeichen", gibt max. Abstand zur „Mittellinie" an)
(Streckung in y-Richtung)

$\left(a<0:\ \text{an der } x\text{-Achse gespiegelt}\right)$ $\left(a=\dfrac{y_{\max}-y_{\min}}{2}\right)$

b **- entscheidet Periodenlänge**
(„Dauer eines Durchlaufes")
$\left(\text{Streckung in } x\text{-Richtung um } \dfrac{1}{b}\right)$

$b=\dfrac{2\pi}{p}$ (p entspricht der Periodenlänge)

c **- Verschiebung in *x*-Richtung**

$c>0$: nach rechts
$c<0$: nach links

d **- Verschiebung in *y* - Richtung**
(„Höhe der Mittellinie")

$d>0$: nach oben
$d<0$: nach unten

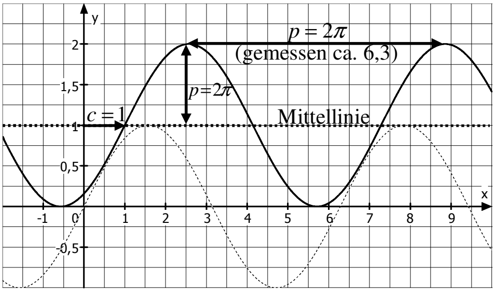
$\left(d=\dfrac{y_{\max}+y_{\min}}{2}\right)$

Vorsicht beim Koeffizienten *c*

Das Schaubild zu $f(x)=\sin(x-3)$ wurde um 3 Einheiten nach *rechts* verschoben!
Der Koeffizient c hat den Wert $+3$, das Minuszeichen kommt vom allgemeinen Ansatz der Funktion.

Entsprechend $f(x)=\sin(x+2)$: Verschiebung um 2 nach *links*!

Beispiel 1 (Zusätzlich ist das Schaubild von $f(x)=\sin(x)$ gestrichelt eingezeichnet.)



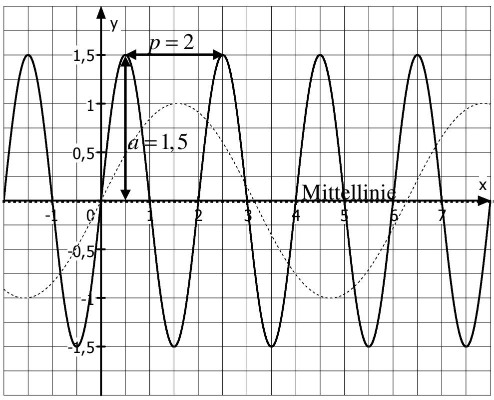
$\Rightarrow f(x)=\sin(x-1)+1$

$\left(\text{Alternativ: } f(x)=\cos(x-2{,}57)+1\right)$

Mit $\boldsymbol{f(x)=a\cdot\sin\left(b\cdot(x-c)\right)+d}$ **:**

- $d=1$ Mittellinie auf Höhe $+1$ $\left(\text{oder mit } \frac{2+0}{2}=\frac{2}{2}=1\right)$
- $a=1$ (max. Abstand von 1 zur Mittellinie) $\left(\text{oder mit } \frac{2-0}{2}=\frac{2}{2}=1\right)$
- $c=1$ Verschiebung um 1 nach rechts
- $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2\pi}=1$

Beispiel 2



$\Rightarrow f(x)=1{,}5\cdot\sin(\pi\cdot x)$

$\left(\text{Alternativ: } f(x)=1{,}5\cdot\cos\left(\pi\cdot(x-0{,}5)\right)\right)$

Mit $\boldsymbol{f(x)=a\cdot\sin\left(b\cdot(x-c)\right)+d}$ **:**

- $d=0$ Mittellinie auf Höhe 0 $\left(\text{oder mit } \frac{1{,}5+(-1{,}5)}{2}=\frac{0}{2}=0\right)$
- $a=1{,}5$ max. Abstand von 1,5 zur Mittellinie $\left(\text{oder mit } \frac{1{,}5-(-1{,}5)}{2}=\frac{3}{2}\right)$
- $c=0$ keine Verschiebung bei sin
- $b=\frac{2\pi}{p}=\frac{2\pi}{2}=\pi$

Tipp

Arbeiten Sie die Koeffizienten in dieser Reihenfolge ab!

Äußere Koeffizienten regeln Eigenschaften, die an der ***y*-Achse** gemessen werden.

$$f(x)=a\cdot\sin\left(b\cdot(x-c)\right)+d$$
$$f(x)=a\cdot\cos\left(b\cdot(x-c)\right)+d$$

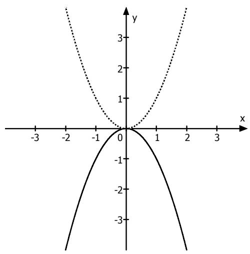
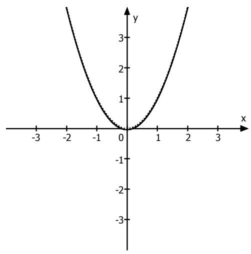
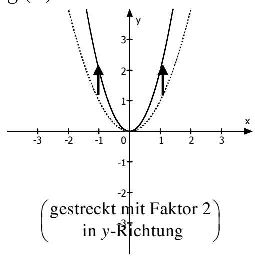
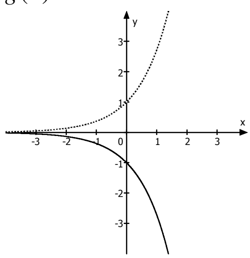
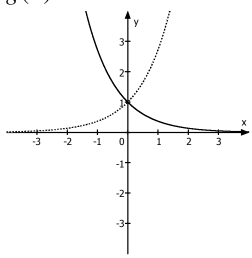
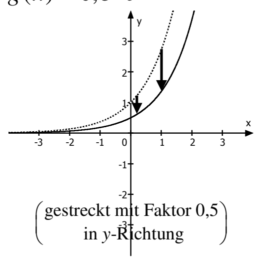
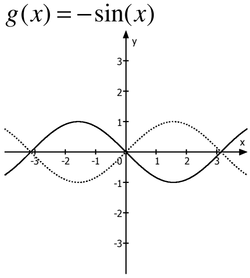
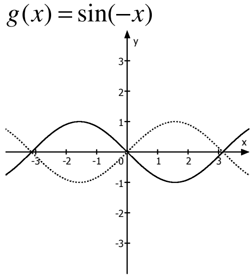
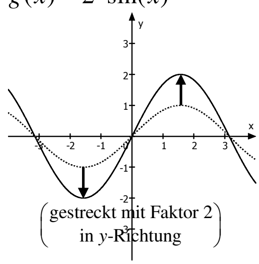
Hilfe

Innere Koeffizienten regeln Eigenschaften, die an der ***x*-Achse** gemessen werden.

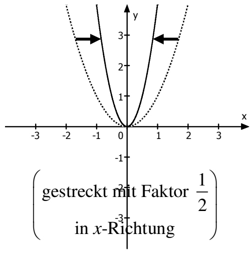
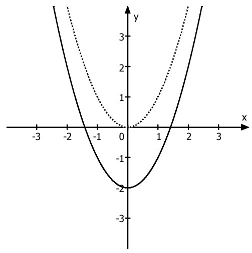
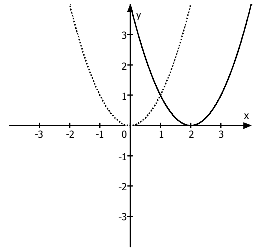
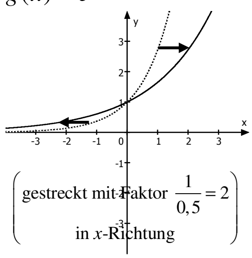
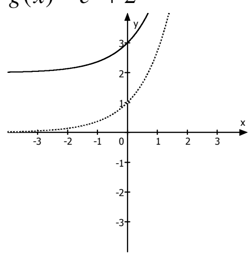
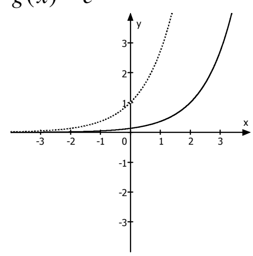
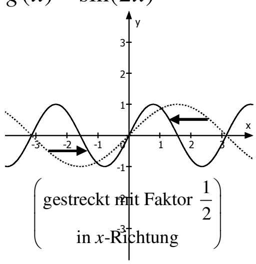
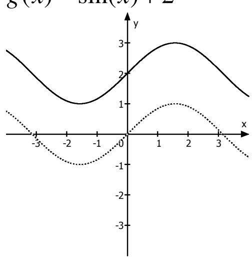
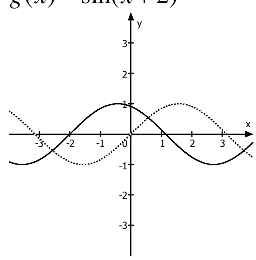
3. Anwendungen

Periodische Vorgänge, also Vorgänge, die sich in gleichen Zeitabschnitten wiederholen, werden oft mit trigonometrischen Funktionen modelliert.

1.6 Übersicht: Spiegeln, Strecken und Verschieben $\quad f(x) \rightarrow$

	Spiegeln an ...		Strec -
	... x - Achse	... y - Achse	... y - Richtung
$f(x) = x^2$	$g(x) = -x^2$ 	$g(x) = (-x)^2 = x^2$ 	$g(x) = 2 \cdot x^2$ 
$f(x) = e^x$	$g(x) = -e^x$ 	$g(x) = e^{-x}$ 	$g(x) = 0,5 \cdot e^x$ 
$f(x) = \sin(x)$	$g(x) = -\sin(x)$ 	$g(x) = \sin(-x)$ 	$g(x) = 2 \cdot \sin(x)$ 
	$g(x) = -f(x)$	$g(x) = f(-x)$	$g(x) = \boldsymbol{a} \cdot f(x)$
	„ – “ vor Funktionsterm	„x“ durch „ $-x$“ ersetzt	Streckung mit Faktor $\lvert \boldsymbol{a} \rvert$ in y-Richtung

$\rightarrow \quad \boldsymbol{g(x) = a \cdot f\left(b \cdot (x-c)\right) + d}$

ken in ...	**Verschieben in ...**	
... *x* - Richtung	**... *y* - Richtung**	**... *x* - Richtung**
$g(x) = (2x)^2 = 4x^2$  (gestreckt mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung)	$g(x) = x^2 - 2$ 	$g(x) = (x-2)^2$ 
$g(x) = e^{0,5x}$  (gestreckt mit Faktor $\frac{1}{0,5} = 2$ in x-Richtung)	$g(x) = e^x + 2$ 	$g(x) = e^{x-2}$ 
$g(x) = \sin(2x)$  (gestreckt mit Faktor $\frac{1}{2}$ in x-Richtung)	$g(x) = \sin(x) + 2$ 	$g(x) = \sin(x+2)$ 
$g(x) = f(\boldsymbol{b} \cdot x)$ Streckung mit Faktor $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\vert b\vert}}$ in x-Richtung	$g(x) = f(x) \pm \boldsymbol{d}$ z.B. $\ldots + 2$: Versch. nach oben $\ldots - 2$: Versch. nach unten	$g(x) = f(x \pm \boldsymbol{c})$ z.B. $(x-2)$: V. nach rechts $(x+2)$: V. nach links