3.5 Umwandlungen der Ebenenformen

Ebenenformen werden meist ineinander umgewandelt, um **Rechenaufwand einzusparen**.
Beispielweise ist das Aufstellen einer Ebene in der Parameterform sehr einfach, hingegen sind weitere Rechnungen in dieser Form meist umständlich. Hierfür ist es oftmals sinnvoll, die Parameterform in die Koordinatenform umzuwandeln.

Eine Übersicht, in welcher Situation welche Ebenenform zu empfehlen ist, finden Sie auf S. 99.

Sinnvolle Umwandlungen

Parameterform
$\left(\text{E}: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}\right)$
$\downarrow$ **(2.)**
Normalenform
(1.) $\left(\text{E}: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0\right)$ **(4.)**
$\downarrow$ **(3.)**
Koordinatenform
$\left(\text{E}: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d\right)$

1. Von der Parameterform zur Koordinatenform

Beispiel: $\text{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

Schritt 1: Vektorprodukt der beiden Spannvektoren bilden. Man erhält den Normalenvektor.
$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & - & (-2) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 0 & - & 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 & - & 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{n}$ Hilfsschema: $\begin{pmatrix} \cancel{1} & \cancel{0} \\ 1 & 1 \\ -2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ \cancel{-2} & \cancel{2} \end{pmatrix}$
Schritt 2: Einträge des Normalenvektors übernehmen: E: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$. Koordinaten des Stützpunktes einsetzen.
$\text{E}: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = b$; Einsetzen von $\text{P}(0{,}5 \mid 0 \mid 2)$: $\text{E}: 4 \cdot 0{,}5 - 2 \cdot 0 + 2 = b \Leftrightarrow 4 = b$ $\Rightarrow \text{E}: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$

2. Von der Parameterform zur Normalenform

Beispiel: $\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

Schritt 1 : Vektorprodukt der beiden Spannvektoren bilden. Man erhält den Normalenvektor. (Alternative: Mit Skalarprodukt wie oben)
$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (siehe Vorseite)
Schritt 2 : Stützvektor $\vec{p}$ aus Parameterform übernehmen. In $\mathrm{E}: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0$ einsetzen.
$\mathrm{E}: \left(\vec{x} - \vec{p}\right) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

3. Von der Normalenform zur Koordinatenform

Beispiel: $\mathrm{E}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Schritt 1: Ausmultiplizieren.
E: $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ $\Leftrightarrow 4x_1 - 2x_2 + x_3 - \left(0{,}5 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{E}: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$

4. Von der Koordinatenform zur Parameterform

Beispiel: $\mathrm{E}: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$

- **Möglichkeit 1** („Einfache Ebenenpunkte“)

Schritt 1: Koordinaten von 3 „einfachen“ Ebenenpunkten ermitteln (z.B. Spurpunkte).
$\mathrm{S}_1\left(\frac{4}{4}\mid 0\mid 0\right) = \mathrm{S}_1(1\mid 0\mid 0)$; $\mathrm{S}_2\left(0\mid \frac{4}{-2}\mid 0\right) = \mathrm{S}_2(0\mid -2\mid 0)$; $\mathrm{S}_3\left(0\mid 0\mid \frac{4}{1}\right) = \mathrm{S}_3(0\mid 0\mid 4)$
Schritt 2: Parameterform aus 3 Punkten aufstellen (S. 147).
$\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0-1\\-2-0\\0-0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}0-1\\0-0\\4-0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\4\end{pmatrix}$

- **Möglichkeit 2**

Schritt 1: In Koordinatengleichung $x_2 = r$ und $x_3 = s$ setzen. Nach x_1 auflösen.
$\mathrm{E}: 4x_1 - 2x_2 + x_3 = 4 \Leftrightarrow 4x_1 - 2r + s = 4 \Leftrightarrow 4x_1 = 4 + 2r - s \Leftrightarrow x_1 = 1 + 0,5r - 0,25s$
Schritt 2: $\vec{x}$ als Vektor darstellen. „Aufteilen“.
$\vec{x} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0,5r-0,25s\\r\\s\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0,5r-0,25s\\0+1\cdot r+0\cdot s\\0+0\cdot r+1\cdot s\end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0,5\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-0,25\\0\\1\end{pmatrix}$

Hinweis: Die beiden Ebenengleichungen, die man durch die beiden Möglichkeiten 1 bzw. 2 erhält, gehören natürlich zur gleichen Ebene.

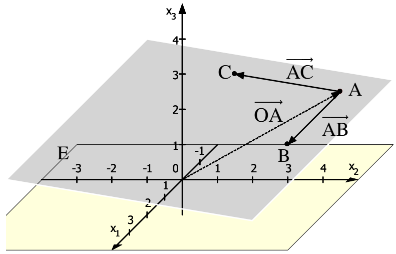
Zusatz: In welcher Situation ist welche Ebenenform zu empfehlen?

1. Aufstellen einer Ebenengleichung …

… besser in **Parameterform**

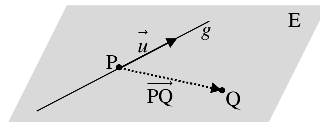
- Aufstellen aus **3 Punkten**

Vorgehen: E: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$)
(S. 91)

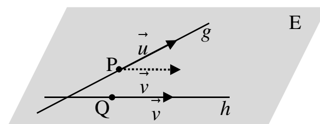


- Aufstellen aus einer Geraden g: $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u}$ und ...

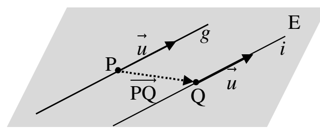
... dem **Punkt Q**, welcher **nicht auf der Geraden** liegt.
Vorgehen: E : $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{PQ}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$).



... der **Geraden** h : $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{v}$, welche g **schneidet**.
Vorgehen: E : $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$).



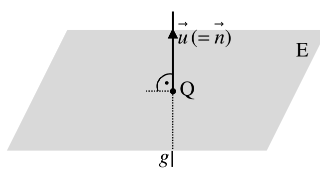
... der **Geraden** i : $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + s \cdot \vec{u}$, welche **parallel** zu g verläuft.
Vorgehen: E : $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \overrightarrow{PQ}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$).



… besser in **Normalenform** (bzw. **Koordinatenform**)

- Aufstellen der Gleichung einer Ebene, die orthogonal (senkrecht) zu einer bekannten Geraden $g : \vec{x} = \overrightarrow{OP} + r \cdot \vec{u}$ und durch einen gegebenen Punkt Q verläuft;

Vorgehen: E : $\left(\vec{x} - \vec{q}\right) \cdot \vec{u} = 0$
($\vec{q}$ als Stützvektor, den Richtungsvektor $\vec{u}$ der Geraden als Normalenvektor verwenden)



2. Rechnen mit einer Ebenengleichung

Hier ist stets die **Koordinatenform** der Ebenengleichung zu empfehlen.
Bei vielen Rechnungen lohnt es sich also, eine gegebene Parametergleichung bzw. Normalengleichung in die Koordinatengleichung umzuwandeln.