3. Ebenen

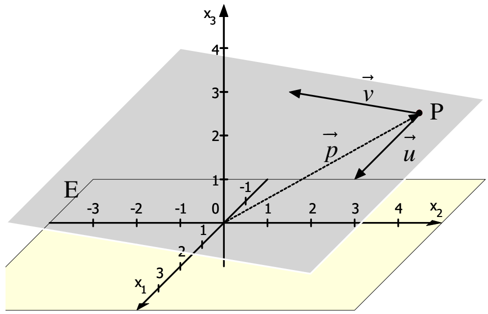
3.1 Ebenengleichungen in Parameterform

Die Punkt-Richtungs-Form:

$\mathbf{E:}\ \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{r} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{s} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

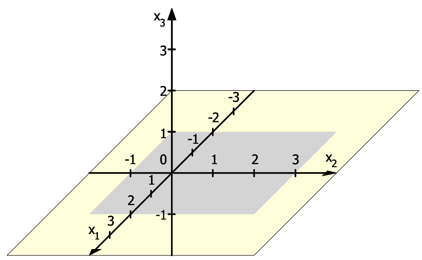
- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Stützpunktes P)
- $\vec{u}$, $\vec{v}$: Spannvektoren (keine Vielfachen voneinander)
- r, s: Parameter (mit $r, s \in \mathbb{R}$)

Beispiel: $\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{r} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{s} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$

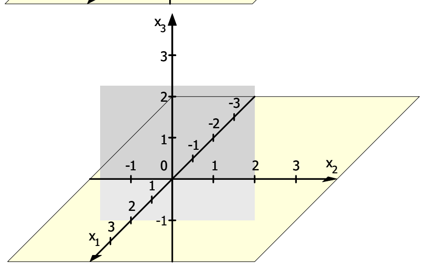


Die Koordinatenebenen in der Parametermeterform

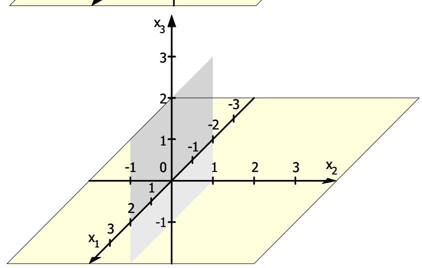
x_1x_2-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$



x_2x_3-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$



x_1x_3-Ebene: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \\ 1 \end{pmatrix}$

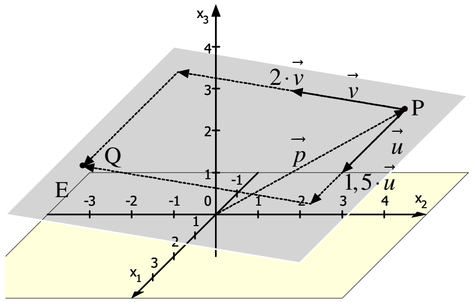


Elementare Aufgabenstellungen in der Parameterform

• Überprüfen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt (Punktprobe)

Beispiel: Liegt $Q(1{,}5\,|\,-3\,|\,2)$ in der Ebene

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\0{,}5\end{pmatrix}\ (\text{mit } r,\, s\in\mathbb{R})?$$



Durch Einsetzen erhält man ein LGS:

$$\begin{pmatrix}1{,}5\\-3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\-3\\0{,}5\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{array}{l} 1{,}5=-3+3r\\ -3=3-3s\\ 2=1+0{,}5s\end{array}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{array}{ll} r=1{,}5 & (1)\\ s=2 & (2)\\ s=2 & (3)\end{array}$$

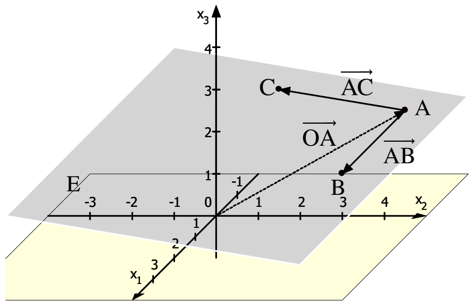
Das LGS hat eine Lösung. Somit liegt Q in der Ebene.

• Ebenengleichung aufstellen aus 3 Punkten

Zwei-Punkte-Form:

$$\mathbf{E:}\ \vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}+s\cdot\overrightarrow{AC}\quad(\text{mit } r,\, s\in\mathbb{R})$$

- $\overrightarrow{OA}$, der Ortsvektor des Punktes A, wird als Stützvektor verwendet
- $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$, die Verbindungsvektoren der Punkte, bilden die Richtungsvektoren.
- $r,\ s$: Parameter (mit $r,\, s\in\mathbb{R}$)



Beispiel: Ebene durch $A(0\,|\,1\,|\,2)$, $B(3\,|\,2\,|\,2)$ und $C(-1\,|\,1\,|\,0)$.

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3-0\\2-1\\2-2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1-0\\1-1\\0-2\end{pmatrix}\Leftrightarrow E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-2\end{pmatrix}\ (\text{mit } r,\, s\in R)$$

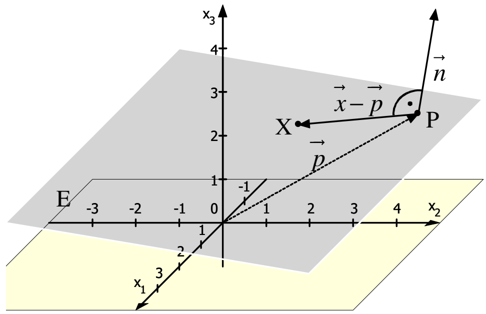
Parameterform, geeignet für:
Aufstellen aus 3 Punkten

3.2 Ebenengleichungen in Normalenform

$$\mathbf{E:}\ \left(\vec{\boldsymbol{x}}-\vec{\boldsymbol{p}}\right)\cdot\vec{\boldsymbol{n}}=\mathbf{0}$$

- $\vec{p}$: Stützvektor (Ortsvektor des Ebenenpunktes P)
- $\vec{n}$: Normalenvektor (steht senkrecht auf der Ebene)

Beispiel: $\mathrm{E}:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\3\\1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\0{,}5\\3\end{pmatrix}=0$



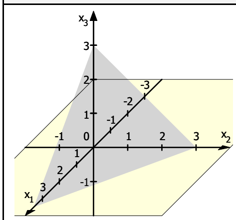
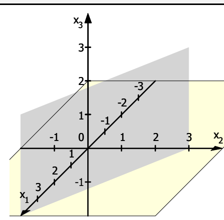
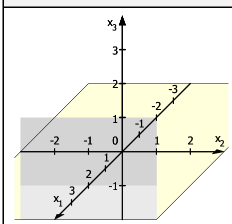
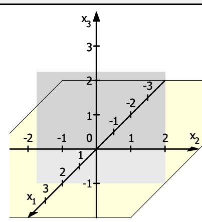
Hinweise

• Der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{PX}}=\vec{x}-\vec{p}$, der ausgehend von P zu einem allgemeinen Ebenenpunkt X zeigt, steht senkrecht auf $\vec{n}$. Deshalb ergibt das Skalarprodukt in der Normalengleichung 0.

• Machen Sie sich klar, dass eine Ebene schon eindeutig festgelegt ist, wenn man nur **einen** Ebenenpunkt und **einen** Vektor kennt, der senkrecht auf der Ebene steht.

Normalenform, geeignet für:
Aufstellen aus senkrechtem Vektor + Punkt

Beispiele und Lage im Koordinatensystem

1. „Normalfall“: 3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	2. Parallel zu einer Achse (x_3-Achse)
 $\mathrm{E}:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}=0$	 $\mathrm{E}:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=0$
3. Parallel zu 2 Achsen (x_2 und x_3-Achse) bzw. einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)	4. Ebene liegt in einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)
 $\mathrm{E}:\left(\vec{x}-\vec{p}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=0$	 $\mathrm{E}:\left(\vec{x}-\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\end{pmatrix}=0$

Elementare Aufgabenstellungen in der Normalenform

- **Überprüfen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt (Punktprobe)**

Beispiel: Liegt $Q(1|3|1)$ in der Ebene $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$?

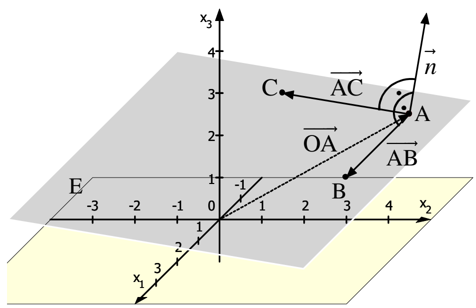
Einsetzen und Ausmultiplizieren führt auf eine Gleichung:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot 3 \Leftrightarrow 0 = 0$$

Man erhält eine wahre Aussage. Somit liegt Q in der Ebene.
(Bei einem Widerspruch liegt Q nicht in der Ebene.)

- **Ebenengleichung aufstellen aus 3 Punkten**

Beispiel: Ebene durch $A(0|1|2)$, $B(3|2|2)$ und $C(-1|1|0)$.



$A(0|1|2)$ wird als Stützpunkt verwendet:

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \vec{n} = 0.$$

Verbindungsvektoren:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-1 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht **senkrecht** auf diesen beiden Vektoren und kann deshalb mit dem **Vektorprodukt** errechnet werden:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) & -\ 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-1) & -\ 3 \cdot (-2) \\ 3 \cdot 0 & -\ 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cancel{3} & & \cancel{-1} \\ 1 & & 0 \\ 0 & \times & -2 \\ 3 & \times & -1 \\ 1 & \times & 0 \\ \cancel{0} & & \cancel{-2} \end{pmatrix}$$ (Hilfsschema)

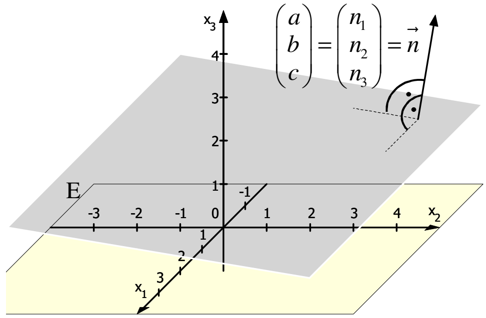
Man erhält $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

3.3 Ebenengleichungen in Koordinatenform

E: $\boldsymbol{ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$

oder

E: $\boldsymbol{n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b}$



Beispiel:

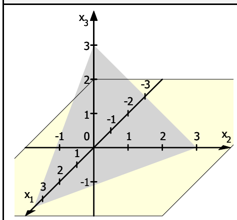
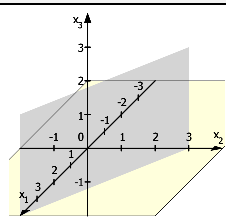
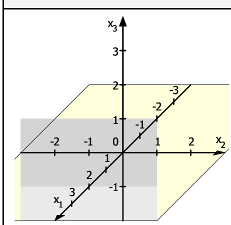
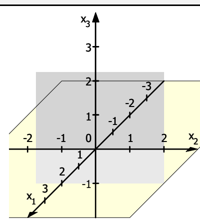
E: $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$

mit Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$,

welcher senkrecht auf der Ebene steht.

Hinweis: Auch die Koordinatengleichung einer Ebene ist nicht eindeutig. Beispielsweise stellt E: $4x_1 - 6x_2 + 8x_3 = -8$ eine weitere Koordinatengleichung der oberen Ebene E dar, da sie ein Vielfaches (2-faches) ist.

Beispiele und Lage im Koordinatensystem

1. „Normalfall": 3 Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen	2. Parallel zu einer Achse (x_3-Achse)
 E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$	 E: $ax_1 + bx_2 = d$
3. Parallel zu 2 Achsen (x_2 und x_3-Achse) bzw. einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)	4. Ebene liegt in einer Koordinatenebene (x_2x_3-Ebene)
 E: $ax_1 = d$	 E: $x_1 = 0$ (x_2x_3-Ebene) Zusatz: E: $x_3 = 0$ (x_1x_2-Ebene) E: $x_2 = 0$ (x_1x_3-Ebene)

Elementare Aufgabenstellungen in der Koordinatenform

- **Überprüfen, ob ein Punkt in einer Ebene liegt (Punktprobe)**

Beispiel: Liegt $Q(2|2|0)$ in der Ebene $E:\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -4$?

Einsetzen: $2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = -4 \ \Leftrightarrow\ -2 \neq -4$
Falsche Aussage. Somit liegt Q nicht in der Ebene.

Koordinatenform,
geeignet für:
die meisten Rechnungen

- **Ebenengleichung aufstellen aus 3 Punkten**

Beispiel: Bestimmen Sie die Koordinatenform der Ebene, in welcher die 3 Punkte $A(0|1|2), B(3|2|2)$ und $C(-1|1|0)$ liegen.

Zunächst Normalenvektor der Ebene bestimmen (siehe Normalenform, S. 93): $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einträge des Normalenvektors in Koordinatenform übernehmen: $E:\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = d$;
Z.B. Koordinaten von $A(0|1|2)$ einsetzen: $-2 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = d \ \Leftrightarrow\ 8 = d$
Man erhält $E:\ -2x_1 + 6x_2 + x_3 = 8$.

3.4 Spurpunkte, Spurgeraden und die Lage im Koordinatensystem

Beim Einzeichnen einer Ebene in das Koordinatensystem orientiert man sich an den **Spurpunkten** (Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen) und den **Spurgeraden** (Schnittgeraden mit den Koordinatenebenen).

Die Spurpunkte einer Ebene können in der Koordinatenform schnell bestimmt werden.

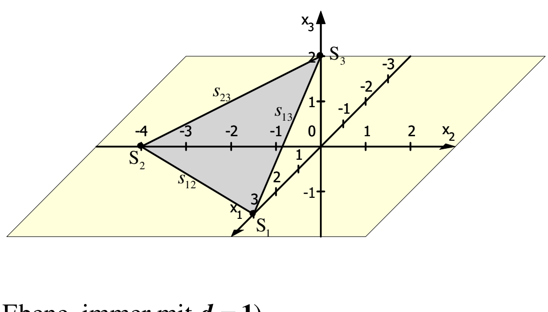
$\boldsymbol{E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d}$ hat die Spurpunkte $\boldsymbol{S_1\left(\frac{d}{a}|0|0\right), S_2\left(0|\frac{d}{b}|0\right), S_3\left(0|0|\frac{d}{c}\right)}$

Beispiel: Geben Sie die Spurpunkte der Ebene $E:\ 4x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 12$ an.

$S_1\left(\frac{12}{4}|0|0\right) = S_1(3|0|0)$,

$S_2\left(0|\frac{12}{-3}|0\right) = S_2(0|-4|0)$,

$S_3\left(0|0|\frac{12}{6}\right) = S_3(0|0|2)$



Zusatz („Achsenabschnittsform" einer Ebene, immer mit $\boldsymbol{d = 1}$)
Umgekehrt kann aus den Spurpunkten direkt die zugehörige Ebene angegeben werden:

$S_1(3|0|0), S_2(0|-4|0), S_3(0|0|2) \ \Rightarrow\ E:\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = \mathbf{1}$