## 3.11 Ermittlung von Funktionsgleichungen („Steckbriefaufgaben“)

**Beispiel**

Gesucht ist die Gleichung einer Funktion 4. Grades, deren Schaubild symmetrisch zur $y$-Achse ist. Das Schaubild hat den Tiefpunkt $\mathrm{T}(2\,|\,1)$ und besitzt an der Stelle 1 die Steigung $-2{,}4$.

**Lösung**

Allgemeiner Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$

Da symm. zur $y$-Achse: $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ (*nur gerade Hochzahlen*)

$f'(x) = 4ax^3 + 2cx$

**Bedingungen**

$\mathrm{T}(2\,|\,1)$ (*Punktprobe*): $f(2) = a\cdot 2^4 + c\cdot 2^2 + e = 1 \quad\Rightarrow\quad 16a + 4c + e = 1$

$\mathrm{T}(2\,|\,1)$ (*Bed.* $f'(x) = 0$): $f'(2) = 4a\cdot 2^3 + 2c\cdot 2 = 0 \quad\Rightarrow\quad 32a + 4c = 0$

In $x = 1$ Steigung $-2{,}4$: $f'(1) = 4a\cdot 1^3 + 2c\cdot 1 = -2{,}4 \quad\Rightarrow\quad 4a + 2c = -2{,}4$

**Lösen des LGS**

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 1 \\ 32 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & -2{,}4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 1 & 10{,}6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 12{,}6 \end{array}\right)$$

(Hinweis: Schnelleres Lösen des LGS durch Tausch der 1. mit der 3. Spalte möglich.)

$\mathrm{III}: 3e = 12{,}6$

$e = 4{,}2$

in $\mathrm{II}: 2c + 1\cdot 4{,}2 = 1$

$c = -1{,}6$

in $\mathrm{I}: 16a + 4\cdot(-1{,}6) + 1\cdot 4{,}2 = 1$

$a = 0{,}2$

Man erhält: $f(x) = 0{,}2x^4 - 1{,}6x^2 + 4{,}2$

**Notwendig**

Mindestens so viele Bedingungen bzw. Gleichungen wie unbekannte Koeffizienten im Ansatz vorhanden (im Beispiel: 3 Bedingungen bzw. Koeffizienten).

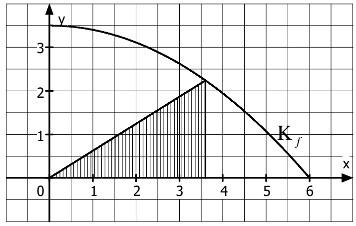
**Typische Beschreibungen von Schaubildern und zugehörige math. Bedingungen**

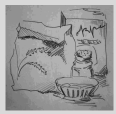
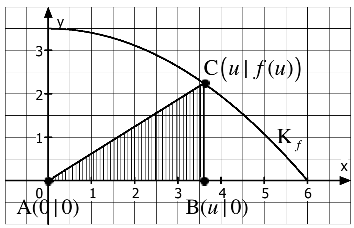
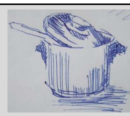
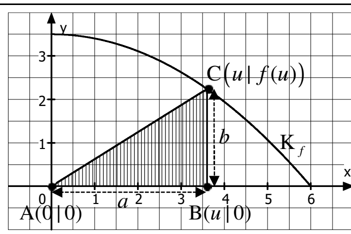
| Beschreibungen des Schaubildes | Mathematische Bedingungen |
|---|---|
| Schaubild ist punktsymmetrisch zum Ursprung | $f(x)$ *enthält nur ungerade Hochzahlen*<br>*z.B.* $f(x)=ax^3+cx$ *bei Grad 3* |
| Schaubild ist achsensymmetrisch zur $y$-Achse | $f(x)$ *enthält nur gerade Hochzahlen*<br>*z.B.* $f(x)=ax^4+cx^2+\mathrm{e}$ *bei Grad 4* |
| Schaubild verläuft durch $\mathrm{P}(3\|8)$ | $f(3)=8$ |
| Schaubild besitzt an der Stelle 2 die Steigung 5 (oder: besitzt am $x$-Wert 2 eine Tangente mit Steigung 5) | $f'(2)=5$ |
| Schaubild berührt an der Stelle 3 die $x$-Achse | $\begin{cases} f(3)=0 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(3\|0)) \\ f'(3)=0 & (\textit{hier Steigung } 0) \end{cases}$ |
| Schaubild besitzt den Hochpunkt $\mathrm{H}(-2\|3)$ | $\begin{cases} f(-2)=3 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(-2\|3)) \\ f'(-2)=0 & (\textit{hier Steigung } 0) \end{cases}$ |
| Schaubild besitzt den Tiefpunkt $\mathrm{T}(-2\|3)$ | *gleiche Bedingungen wie bei* $\mathrm{H}(-2\|3)$ |
| Schaubild besitzt den Wendepunkt $\mathrm{W}(5\|7)$ | $\begin{cases} f(5)=7 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(5\|7)) \\ f''(5)=0 & (\textit{hier „keine Krümmung“}) \end{cases}$ |
| Schaubild besitzt den Sattelpunkt $\mathrm{S}(1\|4)$ | $\begin{cases} f(1)=4 & (\textit{verläuft durch } \mathrm{P}(1\|4)) \\ f'(1)=0 & (\textit{hier Steigung } 0) \\ f''(1)=0 & (\textit{hier „keine Krümmung“}) \end{cases}$ |
| Schaubild schneidet das Schaubild der bekannten Funktion $g(x)$ an der Stelle 2 | $f(2)=g(2)$ $(\textit{hier gleicher } y\textit{-Wert})$ |
| Schaubild berührt das Schaubild der bekannten Funktion $g(x)$ an der Stelle 4 | $\begin{cases} f(4)=g(4) & (\textit{hier gleicher } y\textit{-Wert}) \\ f'(4)=g'(4) & (\textit{hier gleiche Steigung}) \end{cases}$ |

## 3.12 Extremwertaufgaben

**Beispiel**

Aus einer parabelförmigen Holzplatte soll ein möglichst großes Dreieck (s. Skizze, mit rechtem Winkel rechts unten) herausgesägt werden.
Der Rand der Holzplatte wird durch das Schaubild der Funktion $f$ mit $f(x) = -\frac{7}{72}x^2 + \frac{7}{2}$ beschrieben.
Welchen Flächeninhalt kann ein solches Dreieck höchstens haben?



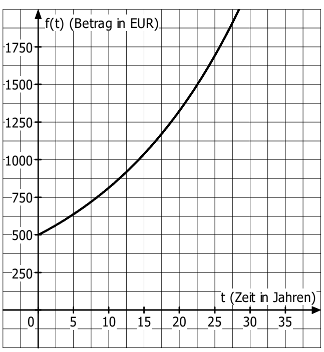
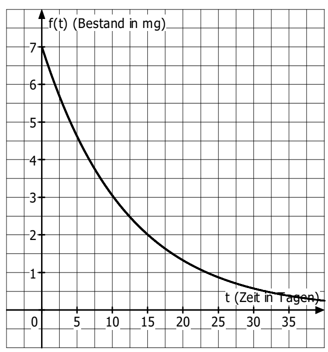

| **Das Rezept** | |
|---|---|
| **Zutaten**  | |
| **1. Skizze machen:** Alles einzeichnen was in der Aufgabenstellung beschrieben wird. | (hier gegeben) |
| **2. Koordinaten möglichst vieler relevanter Punkte (eventuell in Abhängigkeit von $u$) angeben**. Hierbei beachten: Ein Punkt, der „irgendwo auf dem Schaubild“ liegt, besitzt die Koordinaten $(u \mid f(u))$. |   |
| **Kochen**  | |
| **3. Allgemeine Zielfunktion bestimmen**. Formel für die Größe suchen, die maximal (bzw. minimal) werden soll. (z.B. $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$; $A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$; $A = a \cdot b$; $U = 2 \cdot a + 2 \cdot b$; ...) | Flächeninhalt rechtwinkliges Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$ (Allgemeine Zielfunktion) |
| **4. Benötigte Strecken** $(a,\ b,\ c,\ h_c,\ ...)$ für Allgemeine Zielfunktion in **Skizze einzeichnen**. |   |

| | |
|---|---|
| **5. Konkrete Zielfunktion bestimmen.**<br>**Streckenlängen** durch die Koordinaten der Punkte aus 2. **ausdrücken**.<br>Hierbei beachten:<br>- waagr. Streckenlänge: $x_{\text{rechts}} - x_{\text{links}}$<br>- senkr. Streckenlänge: $y_{\text{oben}} - y_{\text{unten}}$<br>**Funktionsterm** aus Aufgabenstellung **einsetzen**. | $\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot \quad a \quad \cdot \quad b$<br>$\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot (u-0) \cdot (f(u)-0)$<br>$\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot \quad u \quad \cdot \left(-\frac{7}{72}u^2 + \frac{7}{2} \; -0\right)$<br>(Konkrete Zielfunktion) |
| **6.** Schaubild der **Konkreten Zielfunktion** auf **Hochpunkt** (bzw. Tiefpunkt) **untersuchen**. | $\mathrm{A}(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot \left(-\frac{7}{72}u^2 + \frac{7}{2}\right) = -\frac{7}{144}u^3 + \frac{7}{4}u;$<br>$\mathrm{A}'(u) = -\frac{7}{48}u^2 + \frac{7}{4};\ \mathrm{A}''(u) = -\frac{7}{24}u$<br>1. $\mathrm{A}'(u) = 0: \ -\frac{7}{48}u^2 + \frac{7}{4} = 0$<br>Lösung: $u_1 \approx 3{,}46 \quad (u_2 \approx -3{,}46$ nicht in D)<br>2. $\mathrm{A}''(3{,}46) \approx -\frac{7}{24} \cdot 3{,}46 < 0 \quad \rightarrow \mathrm{H}$<br>3. $\mathrm{A}(3{,}46) \approx -\frac{7}{144} \cdot 3{,}46^3 + \frac{7}{4} \cdot 3{,}46 \approx 4{,}04$<br>$\rightarrow \mathrm{H}(3{,}46 \mid 4{,}04)$ |
| **7. Randwertuntersuchung**<br>**Grenzen des Definitionsbereiches** für $u$ in Konkrete Zielfunktion **einsetzen**.<br>Erhaltene $y$-Werte mit dem $y$-Wert des Hochpunktes (bzw. Tiefpunktes) **vergleichen**. | Definitionsbereich: $\mathrm{D} = [0;\, 6]$ (s. Skizze)<br>$\mathrm{A}(0) = 0 \ < 4{,}04$<br>$\mathrm{A}(6) = 0 \ < 4{,}04$ |
| **Servieren** |  |
| **8. Antwortsatz**<br>Für $u = ...$ ($x$-Wert Extrempunkt)<br>wird ... (gesuchte Größe)<br>maximal (bzw. minimal).<br>Diese beträgt dann<br>... ($y$-Wert Extrempunkt). | **Antwortsatz**<br>Für $u \approx 3{,}46$<br>wird der Flächeninhalt des Dreiecks<br>maximal.<br>Dieser beträgt dann<br>ungefähr 4,04 Flächeneinheiten. |

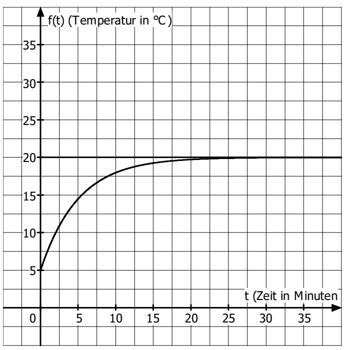
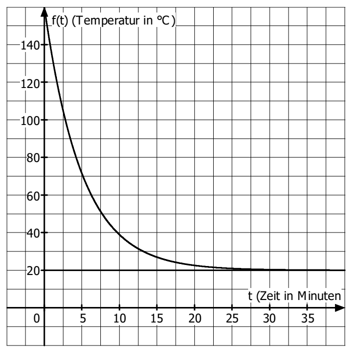
## 3.13 Wachstum und Zerfall

In der **Abiturprüfung** werden die nachfolgenden Inhalte zu natürlichem und beschränktem Wachstum bzw. Zerfall **nicht als bekann**t vorausgesetzt. Trotzdem sind sie hier aufgeführt, da sie als „Vorwissen“ bei entsprechenden Aufgabenstellungen hilfreich sein können.

### 1. (Natürliches) exponentielles Wachstum bzw. Zerfall

| **Exponentielles Wachstum** | **Exponentieller Zerfall** |
|---|---|
| **Beispiel** | |
| Ein Geldbetrag von 500 EUR wird bei einer Bank zu einem Zinssatz von 5 % angelegt. | Von dem radioaktiven Jod 131 sind zu Beginn 7 mg vorhanden. Täglich zerfallen 8 % der vorhandenen Menge. |
| **Funktionsterm $\boldsymbol{f(t) = \mathbf{a} \cdot q^t}$** (ohne Basis *e*) $\left(a\text{: Anfangsbestand} = f(0);\ q\text{: Wachstums- bzw. Zerfallsfaktor}\right)$ | |
| $f(t) = 500 \cdot (1 + \frac{5}{100})^t = 500 \cdot 1{,}05^t \quad (q > 1)$ | $f(t) = 7 \cdot (1 - \frac{8}{100})^t = 7 \cdot 0{,}92^t \quad (q < 1)$ |
| **Funktionsterm $\boldsymbol{f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}}$** (mit Basis *e*) $\left(a\text{: Anfangsbestand} = f(0)\right)$ | |
| $f(t) = 500 \cdot e^{\ln(1+\frac{5}{100}) \cdot t} = 500 \cdot e^{0{,}0488 \cdot t}$ $(k > 0)$ | $f(t) = 7 \cdot e^{\ln(1-\frac{8}{100}) \cdot t} = 7 \cdot e^{-0{,}0834 \cdot t}$ $(k < 0)$ |
| **Schaubild** | |
|  |  |
| **Merkmal** Bestand ändert sich von Zeitschritt zu Zeitschritt stets um den gleichen Faktor bzw. Prozentsatz. | |

## 2. Beschränktes Wachstum bzw. Zerfall

<table>
<tr><th>Beschränktes Wachstum</th><th>Beschränkter Zerfall</th></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Beispiel</td></tr>
<tr><td>Ein Glas mit Milch wird aus dem Kühlschrank ($5\,^\circ\mathrm{C}$) genommen und ins Wohnzimmer ($20\,^\circ\mathrm{C}$) gestellt.</td><td>Eine Pizza wird aus dem Backofen ($160\,^\circ\mathrm{C}$) genommen und ins Wohnzimmer ($20\,^\circ\mathrm{C}$) gelegt.</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Funktionsterm: $\boldsymbol{f(t) = \mathrm{S} - a \cdot e^{-k \cdot t}}$ (mit Basis $e$)<br>$\left(\text{S: Schranke; } a = \mathrm{S} - f(0) = \text{Schranke} - \text{Anfangsbestand}\right)$<br>($k = 0{,}2$ hier gegeben)</td></tr>
<tr><td>$f(t) = 20 - (20-5) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} = 20 - 15 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$<br>$\left(\begin{array}{l}\text{Wachstum, da } a = \mathrm{S} - f(0) > 0; \\ \text{Schranke größer als Anfangsbestand}\end{array}\right)$</td><td>$f(t) = 20 - (20-160) \cdot e^{-0{,}2 \cdot t} = 20 + 140 \cdot e^{-0{,}2 \cdot t}$<br>$\left(\begin{array}{l}\text{Zerfall, da } a = \mathrm{S} - f(0) < 0; \\ \text{Schranke geringer als Anfangsbestand}\end{array}\right)$</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Schaubild</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="2" align="center">Merkmal<br>Der Bestand einer zu- oder abnehmenden Größe ist durch eine obere oder untere Schranke (Asymptote $y = \mathrm{S}$) beschränkt.</td></tr>
</table>