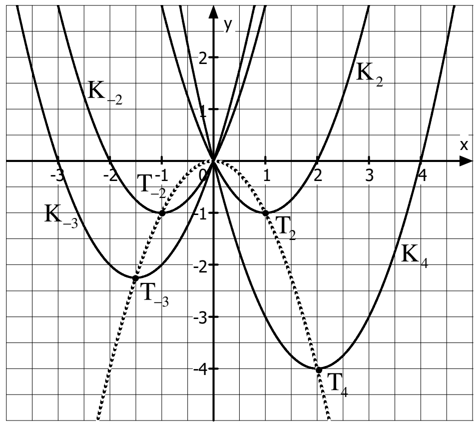
3.9 Ortskurve

Begriffserklärung

Bei einer Funktionenschar $f_t(x)$ sind die Koordinaten besonderer Punkte, wie Hochpunkte, Tiefpunkte und Wendepunkte, meist vom Wert des Parameters t abhängig.

Für jeden Wert des Parameters, also für jede Funktion aus der Schar, haben diese Punkte deshalb verschiedene Koordinaten.
Eine **„Verbindungslinie“**, die beispielsweise durch alle Tiefpunkte der Schar verläuft, wird als die Ortskurve der Tiefpunkte bezeichnet.



Beispiel

Die Parabelschar $f_t(x) = x^2 - tx$ mit $t \in \mathbb{R}$

hat den allgemeinen Tiefpunkt $T_t\left(\frac{t}{2} \middle| -\frac{t^2}{4}\right)$

$\left(\text{z.B. } T_2(1|-1);\ T_4(2|-4);\ \ldots\right)$.

Die **Ortskurve der Tiefpunkte** hat die Funktionsgleichung: $\boldsymbol{y = -x^2}$

Ermittlung der Koordinaten des allgemeinen Tiefpunktes

$f_t(x) = x^2 - tx$

$f_t'(x) = 2x - t$

$f_t''(x) = 2$

1. Schritt:
$$\begin{aligned} f_t'(x) &= 0 \\ 2x - t &= 0 \qquad |+t \\ 2x &= t \qquad |:2 \\ x &= \frac{t}{2} \end{aligned}$$

2. Schritt: $f_t''\left(\frac{t}{2}\right) = 2 \ > \ 0 \rightarrow \mathrm{T}$

3. Schritt: $f_t\left(\frac{t}{2}\right) = \left(\frac{t}{2}\right)^2 - t \cdot \frac{t}{2} = \frac{t^2}{4} - \frac{t^2}{2} = -\frac{t^2}{4} \quad \rightarrow \quad T_t\left(\frac{t}{2} \middle| -\frac{t^2}{4}\right)$

Vorgehen zur Ermittlung der Funktionsgleichung der Ortskurve	
1. Schritt Koordinaten des allg. Tiefpunktes bestimmen	$T_t\left(\frac{t}{2}\middle\vert -\frac{t^2}{4}\right)$ (siehe Vorseite)
2. Schritt x- und y-Koordinaten explizit notieren, man erhält ein Gleichungssystem	$x=\frac{t}{2}$ $y=-\frac{t^2}{4}$
3. Schritt x- Gleichung nach t auflösen	$x=\frac{t}{2} \quad \vert \cdot 2$ $2x=t$
4. Schritt t-Wert in y-Gleichung einsetzen	$y=-\frac{t^2}{4}$ $y=-\frac{(2x)^2}{4}$ $y=-\frac{4x^2}{4}$ $\boldsymbol{y=-x^2}$ (Gleichung der Ortskurve)

Hinweis : Einschränkung im Parameter

Falls der Parameter t laut Aufgabenstellung beispielsweise nicht den Wert 0 annehmen kann ($t \neq 0$) gibt es auch keinen Tiefpunkt $T_t\left(\frac{t}{2}\middle\vert ...\right)$ mit dem x-Wert 0.

Somit ist in diesem Fall der Punkt $(0|0)$ auf dem Schaubild von $y=-x^2$ nicht Teil der Ortskurve.

3.10 Zusammenhang zwischen den Schaubildern von Funktion und Ableitung

1. Grundsätzlicher Zusammenhang

Der y-Wert des Schaubildes von f' entspricht an jedem x-Wert der Steigung des Schaubildes von f.

2. Zusammenhang zwischen den besonderen Punkten

Kurzversion (Merkregel: In jeder Zeile steht das englische Wort für „neu“; 3-stufig)

$f(x)$	**N**	**E**	**W**		
$f'(x)$		**N**	**E**	**W**	
$f''(x)$			**N**	**E**	**W**

Ausführliche Version (nur 2-stufig dargestellt)

$f(x)$ bzw. $f'(x)$	**N**	**H**	**T**	**W** (von **Lk** zu **Rk**	**W** (von **Rk** zu **Lk**)	**S**
$f'(x)$ bzw. $f''(x)$		**N** „von + nach –“	**N** „von – nach +“	**H**	**T**	**N** ohne **VZW** (z.B. doppelte N) bzw. **H** oder **T** auf der x-Achse

Abkürzungen

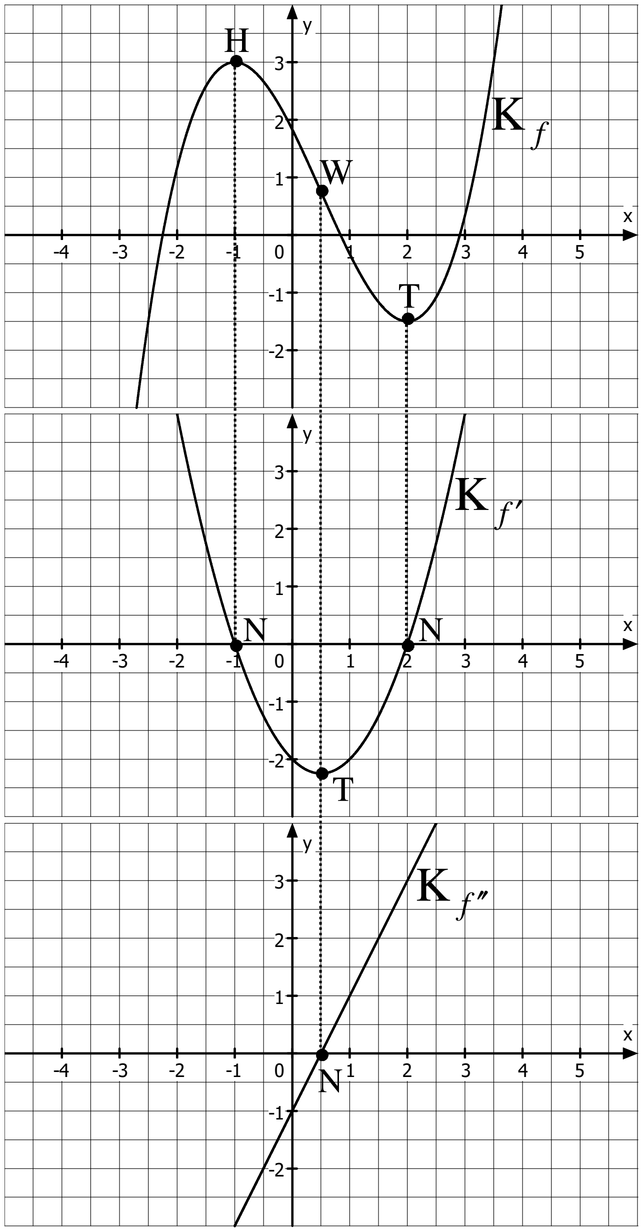
Nullstelle
Extrempunkt (**H**och- oder **T**iefpunkt)
Links**k**rümmung / **R**echts**k**rümmung
Wendepunkt
Sattelpunkt
Vor**Z**eichen**W**echsel

Bemerkungen

- Die obigen Zusammenhänge gelten natürlich auch zwischen der Stammfunktion F und der zugehörigen Funktion f.
- Die Symmetrieart eines Schaubildes „pendelt“ beim Ableiten.

Beispiel: K_f ist symmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow K_{f'}$ ist symmetrisch zum Ursprung $\Rightarrow K_{f''}$ ist symmetrisch zur y-Achse $\Rightarrow$ ...

Beispiel



y
x
H
W
T
K_f
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
3 2 1 -1 -2
y
x
N
N
T
$K_{f'}$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
3 2 1 -1 -2
y
x
N
$K_{f''}$
-4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5
3 2 1 -1 -2