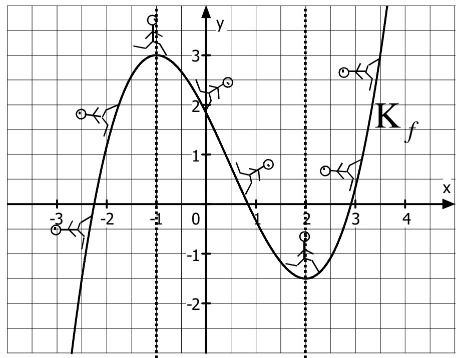
3.4 Monotonie

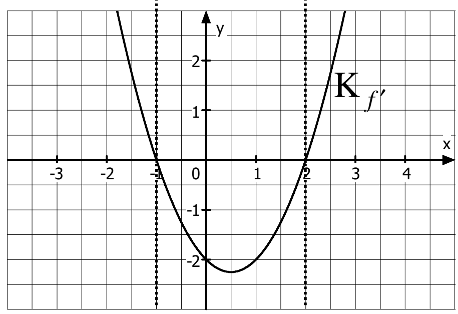
<table>
<tr><th>(Vereinfachte) Definition</th><th>Beispiel</th></tr>
<tr><td>
Gilt am x-Wert: $\boldsymbol{x_0}$

$\boldsymbol{f'(x_0) > 0}$ | $\boldsymbol{f'(x_0) < 0}$

so nennt man die Funktion hier

streng monoton steigend | streng monoton fallend

Männchen geht bergauf | Männchen geht bergab
</td><td>
Einzunehmende Perspektive:
Sie sehen von der Seite auf das Männchen, welches ein hügeliges Gelände durchläuft. Das Gelände sehen Sie im Profil.


streng monoton steigend | streng monoton fallend | streng monoton steigend
$f'(x) > 0$ | $f'(x) < 0$ | $f'(x) > 0$


</td></tr>
</table>

„Normale" Monotonie

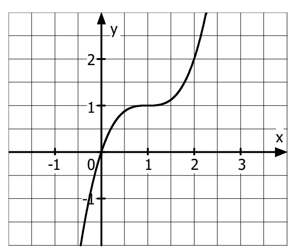
Die Funktion ist nicht (überall) streng monoton steigend, jedoch (überall) monoton steigend.

Unterschied zwischen „normaler" und strenger Monotonie?

Bei normaler Monotonie sind auch Stellen, an welchen das Schaubild die **Steigung 0** besitzt, **erlaubt**.

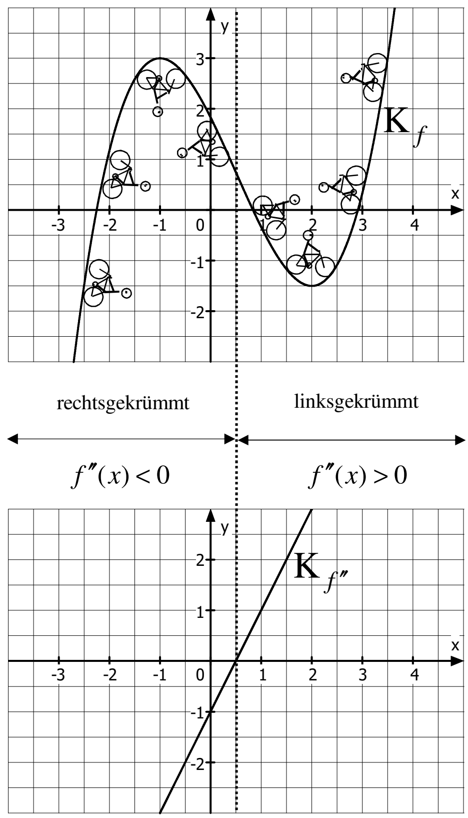
$f'(x_0) \geq 0 \rightarrow$ monoton steigend

$f'(x_0) \leq 0 \rightarrow$ monoton fallend



Steigung 0 bei $x = 1$

3.5 Krümmung

(Vereinfachte) Definition	Beispiel
Gilt am x-Wert: $\boldsymbol{x_0}$ $\boxed{f''(x_0) > 0}$ → so nennt man das Schaubild hier → **links - gekrümmt** ⋯ Fahrradfahrer lehnt sich nach links $\boxed{f''(x_0) < 0}$ → so nennt man das Schaubild hier → **rechts - gekrümmt** ⋯ Fahrradfahrer lehnt sich nach rechts	**Einzunehmende Perspektive:** Sie sehen **von oben (Vogelperspektive**) auf den Fahrradfahrer, welcher eine kurvige Straße durchfährt und sich hierbei zunächst nach rechts, dann nach links lehnt. 

$f''(x)$ n**<u>e</u>**gativ $\Rightarrow$ r**<u>e</u>**chtsgekrümmt
($f''(x)$ pos**<u>i</u>**tiv $\Rightarrow$ l**<u>i</u>**nksgekrümmt)

3.6 Extrempunkte (Hochpunkte und Tiefpunkte)

Vorgehen zur Ermittlung von Hoch- und Tiefpunkten (am Beispiel)	
	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{6}$ (Beispiel) $f'(x)=x^2-x-2$ $f''(x)=2x-1$
1. Schritt: $f'(x)=0$ Stellen mit waagrechter Tangente (Steigung von 0) ermitteln.	$\boldsymbol{f'(x)=0}$ $x^2-x-2=0$ $x_{1/2}=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-2)}}{2\cdot1}$ $=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm3}{2}$ $\Rightarrow \boldsymbol{x_1=-1;\ x_2=2}$
2. Schritt: Einsetzen in $f''(x)$ Falls $\begin{cases}\boldsymbol{f''(x)<0}\\ \boldsymbol{f''(x)>0}\end{cases}$ liegt $\begin{cases}\textbf{Hochpunkt}\\ \textbf{Tiefpunkt}\end{cases}$ vor.	$\boldsymbol{f''(-1)}=2\cdot(-1)-1=-3\quad \boldsymbol{<0}\quad\rightarrow \textbf{H}$ $\boldsymbol{f''(2)}=2\cdot2-1=3\quad \boldsymbol{>0}\quad\rightarrow \textbf{T}$
3. Schritt: Einsetzen in $f(x)$ y-Koordinaten der Hoch- bzw. Tiefpunkte bestimmen.	$\boldsymbol{f(-1)}=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2-2\cdot(-1)+\frac{11}{6}$ $\boldsymbol{=3}\quad\rightarrow\quad \textbf{H}(\boldsymbol{-1}\,|\,\boldsymbol{3})$ $\boldsymbol{f(2)}=\frac{1}{3}\cdot2^3-\frac{1}{2}\cdot2^2-2\cdot2+\frac{11}{6}$ $\boldsymbol{=-1{,}5}\quad\rightarrow\quad \textbf{T}(\boldsymbol{2}\,|\,\boldsymbol{-1{,}5})$

Alternative zum 2. Schritt: Untersuchung auf Vorzeichenwechsel

Hat f' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, dann hat das Schaubild von f hier einen Extrempunkt.

Bei einem Vorzeichenwechsel von $\begin{cases}+\text{ nach }-\\ -\text{ nach }+\end{cases}$ liegt ein $\begin{cases}\text{Hochpunkt}\\ \text{Tiefpunkt}\end{cases}$ vor.

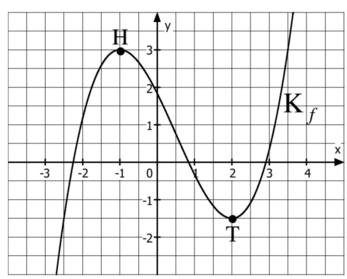
z.B. bei $x_2=2$:

$f'(1)=1^2-1-2=-2\ <0$

$f'(3)=3^2-3-2=4\ >0$

VZW von $-$ nach $+$

$\Rightarrow$ somit Tiefpunkt



3.7 Wendepunkte

Vorgehen zur Ermittlung von Wendepunkten (am Beispiel)	
1. Schritt: $\boldsymbol{f''(x)=0}$ Stellen „ohne Krümmung“ ermitteln.	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{11}{6}$ (Beispiel) $f'(x)=x^2-x-2$ $f''(x)=2x-1$ $f'''(x)=2$ $\boldsymbol{f''(x)=0}$ $2x-1=0 \quad \vert +1$ $2x=1 \quad \vert :2$ $\boldsymbol{x=0{,}5}$
2. Schritt: Einsetzen in $\boldsymbol{f'''(x)}$ Wendepunkt, falls $\boldsymbol{f'''(x)\neq 0}$.	$\boldsymbol{f'''(0{,}5)}=2 \quad \boldsymbol{\neq 0} \quad \rightarrow$ **W**
3. Schritt: Einsetzen in $\boldsymbol{f(x)}$ y-Koordinaten der Wendepunkte bestimmen.	$\boldsymbol{f(0{,}5)}=\frac{1}{3}\cdot 0{,}5^3-\frac{1}{2}\cdot 0{,}5^2-2\cdot 0{,}5+\frac{11}{6}$ $=\boldsymbol{0{,}75} \rightarrow \mathbf{W}(\boldsymbol{0{,}5} \mid \boldsymbol{0{,}75})$

Alternative zum 2. Schritt: Untersuchung auf Vorzeichenwechsel

Hat f'' eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel, dann hat das Schaubild von f hier einen Wendepunkt.

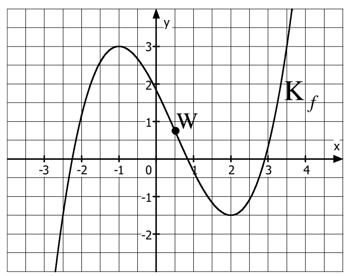
am Beispiel: $x=0{,}5$:

$f''(0)=2\cdot 0-1=-1 \;<0$

$f''(1)=2\cdot 1-1=1 \quad >0$

VZW

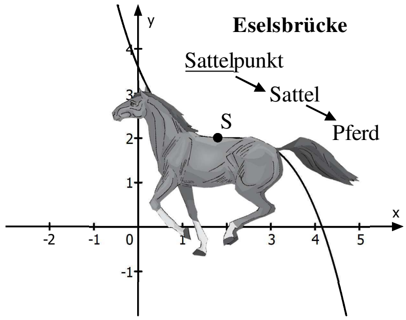
$\Rightarrow$ somit Wendepunkt



Bemerkungen

- Als **Wendetangente** wird eine Tangente bezeichnet, welche das Schaubild im Wendepunkt berührt. Die **Wendenormale** steht senkrecht zur Wendetangente und verläuft ebenfalls durch den Wendepunkt.
- An einer **Wendestelle** hat das Schaubild entweder die **größte** oder die **kleinste Steigung**. Das Schaubild von f' hat hier deshalb entweder einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt.

3.8 Sattelpunkte



Ein Sattelpunkt ist ein **Wendepunkt mit waagrechter Tangente**, also mit einer Steigung von 0.
Somit hat ein Sattelpunkt neben den Eigenschaften eines Wendepunktes $\left(f''(x)=0 \text{ und } f'''(x)\neq 0\right)$ noch die **zusätzliche Eigenschaft $f'(x)=0$**.

Vorgehen zur Ermittlung von Sattelpunkten (am Beispiel)

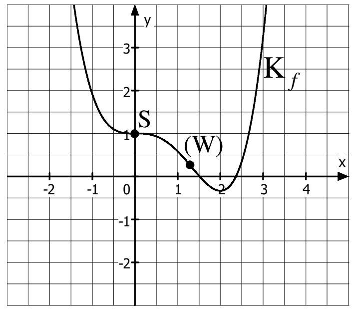
(1. bis 3. Schritt: Ebenso wie bei der Ermittlung von Wendepunkten)

	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+2$ (Beispiel) $f'(x)=x^3-2x^2$ $f''(x)=3x^2-4x$ $f'''(x)=6x-4$
1. Schritt: $f''(x)=0$ Stellen „ohne Krümmung“ ermitteln.	$\mathbf{f''(x)=0}$ $3x^2-4x=0$ $x\cdot(3x-4)=0$ **S. v. Nullpr.** $\mathbf{x_1=0}$ $\quad$ $3x-4=0$ $3x=4$ $\mathbf{x_2=\frac{4}{3}}$
2. Schritt: Einsetzen in $f'''(x)$ Wendepunkt, falls $\mathbf{f'''(x)\neq 0}$.	$f'''(\mathbf{0})=6\cdot 0-4=-4 \quad \mathbf{\neq 0} \rightarrow \mathbf{W}$ $f'''\left(\mathbf{\frac{4}{3}}\right)=6\cdot\frac{4}{3}-4=4 \quad \mathbf{\neq 0} \rightarrow \mathbf{W}$
3. Schritt: Einsetzen in $f(x)$ y-Koordinaten der Wendepunkte bestimmen.	$f(\mathbf{0})=\frac{1}{4}\cdot 0^4-\frac{2}{3}\cdot 0^3+2=\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{W(0\mid 2)}$ $f\left(\mathbf{\frac{4}{3}}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^4-\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^3+2=\mathbf{\frac{98}{81}} \rightarrow \mathbf{W\left(\frac{4}{3}\mid\frac{98}{81}\right)}$

(4. Schritt: **Zusätzlich**)

4. Schritt: Gilt $f'(x)=0$? In diesem Fall liegt ein Sattelpunkt vor. Ansonsten handelt es sich um einen „gewöhnlichen“ Wendepunkt.	$f'(\mathbf{0})=0^3-2\cdot 0^2 \quad \mathbf{=0} \rightarrow \mathbf{S(0\mid 2)}$ $f'\left(\mathbf{\frac{4}{3}}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^3-2\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^2=-\frac{32}{27} \quad \mathbf{\neq 0} \rightarrow \mathrm{W}$

Im Koordinatensystem finden Sie das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 2$ und den berechneten Sattelpunkt.



Jeder Sattelpunkt ist auch ein Wendepunkt,
aber nicht jeder Wendepunkt ist auch ein Sattelpunkt!

Beispiel : Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=0,25x^4-2x^3+4x^2-1$.

a) Berechnen Sie den Schnittpunkt des Schaubildes mit der y-Achse.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Extrempunkte.

c) Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

d) Berechnen Sie die Gleichung einer Wendetangente.

Lösung

a) Ansatz: $f(0)=0,25\cdot 0^4-2\cdot 0^3+4\cdot 0^2-1$

$=-1 \quad \rightarrow \quad S_y(0|-1)$

b) $f(x)=0,25x^4-2x^3+4x^2-1$

$f'(x)=x^3-6x^2+8x$

$f''(x)=3x^2-12x+8$

1. Schritt:

$$f'(x)=0$$

$$x^3-6x^2+8x=0$$

$$x\cdot\left(x^2-6x+8\right)=0$$

S. v. Nullpr.

$x_1=0 \qquad x^2-6x+8=0$

$$x_{2/3}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 1\cdot 8}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}$$

$$x_2=\frac{6-2}{2}=2;$$

$$x_3=\frac{6+2}{2}=4$$

2. Schritt:

$f''(0)=3\cdot 0^2-12\cdot 0+8=8 \quad >0 \quad \rightarrow \text{ T}$

$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+8=-4 \quad <0 \quad \rightarrow \text{ H}$

$f''(4)=3\cdot 4^2-12\cdot 4+8=8 \quad >0 \quad \rightarrow \text{ T}$

3. Schritt:

$f(0)=0,25\cdot 0^4-2\cdot 0^3+4\cdot 0^2-1=-1 \rightarrow \text{ T}(0|-1)$

$f(2)=0,25\cdot 2^4-2\cdot 2^3+4\cdot 2^2-1=3 \rightarrow \text{ H}(2|3)$

$f(4)=0,25\cdot 4^4-2\cdot 4^3+4\cdot 4^2-1=-1 \rightarrow \text{ T}(4|-1)$

c) 1. Schritt:
$$f''(x) = 0$$
$$3x^2 - 12x + 8 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8}}{2 \cdot 3} = \frac{12 \pm \sqrt{48}}{6}$$
$$x_1 = \frac{12 - \sqrt{48}}{6} \approx 0{,}85;$$
$$x_2 = \frac{12 + \sqrt{48}}{6} \approx 3{,}15$$

2. Schritt:
$$f'''(x) = 6x - 12$$
$$f'''(0{,}85) = 6 \cdot 0{,}85 - 12 = -6{,}9 \quad \neq 0 \rightarrow \text{W}$$
$$f'''(3{,}15) = 6 \cdot 3{,}15 - 12 = 6{,}9 \quad \neq 0 \rightarrow \text{W}$$

3. Schritt:
$$f(0{,}85) = 0{,}25 \cdot 0{,}85^4 - 2 \cdot 0{,}85^3 + 4 \cdot 0{,}85^2 - 1 \approx 0{,}79 \rightarrow \text{W}_1\left(0{,}85 \,|\, 0{,}79\right)$$
$$f(3{,}15) = 0{,}25 \cdot 3{,}15^4 - 2 \cdot 3{,}15^3 + 4 \cdot 3{,}15^2 - 1 \approx 0{,}79 \rightarrow \text{W}_2\left(3{,}15 \,|\, 0{,}79\right)$$

d) Berechnung der Wendetangente in $\text{W}_1(0{,}85 \,|\, 0{,}79)$:

1. Schritt: $\text{W}_1(0{,}85 \,|\, 0{,}79)$ (Berührpunkt)

2. Schritt: Tangentensteigung berechnen
$$f'(0{,}85) = 0{,}85^3 - 6 \cdot 0{,}85^2 + 8 \cdot 0{,}85 \approx 3{,}08 \ \left(= m_t\right)$$

3. Schritt: Tangentengleichung berechnen
$$y = m_t \cdot x + b$$
$$0{,}79 = 3{,}08 \cdot 0{,}85 + b$$
$$0{,}79 = 2{,}62 + b \qquad |-2{,}62$$
$$-1{,}83 = b$$
$\Rightarrow$ Tangente: $y = 3{,}08x - 1{,}83$