3. Differenzialrechnung

3.1 Ableitungsregeln

Nr.	Beispiel	Vorgehen
	Elementarregeln	
1	$f(x) = x^5$ $f'(x) = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$ $f(x) = x^2$ $f'(x) = 2 \cdot x^1 = 2x$ $f(x) = x$ $f'(x) = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$ $f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2}$ $f'(x) = -2 \cdot x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$ $f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}}$	$f(x) = x^{Exponent}$ $f'(x) = Exponent \cdot x^{Exponent-1}$ (Potenzregel) **Vor dem Ableiten** $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$ $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$
2	$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$	*Abschreiben*
3	$f(x) = \ln(x)$ $f'(x) = \frac{1}{x}$	„*In den Nenner*“
4	$f(x) = \sin(x)$ $f'(x) = \cos(x)$	$\sin \to \cos \to -\sin \to -\cos \to \sin$ (*Im Uhrzeigersinn!*)
5	$f(x) = \cos(x)$ $f'(x) = -\sin(x)$	

Nr.	Beispiel	Vorgehen
Vorgehensregeln		
6	$f(x) = \mathbf{3} \cdot x^2$ $f'(x) = \mathbf{3} \cdot 2x = 6x$	*„Zahlen" mit $\cdot$ oder $:$ „bleiben"* (Faktorregel)
7	$f(x) = x^2 + \mathbf{2}$ $f'(x) = 2x$	*„Zahlen" mit $+$ oder $-$ „verschwinden"*
8	$f(x) = x^2 - 4x$ $f'(x) = 2x - 4$	*$+$ und $-$ Zeichen unterteilen die Funktion in Teilfunktionen, welche einzeln abgeleitet werden* (Summenregel)

Hinweis: Ableiten bei Funktionenscharen

Der Parameter t wird beim Ableiten wie eine Zahl und nicht wie die Variable x behandelt.

Beispiel: $f_t(x) = t^2 x^3 + t$

$f_t'(x) = 3t^2 x^2$

Produktregel		
9	$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$ $f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$ $f'(x) = \underbrace{u'(x)}_{\textit{Ableiten}} \cdot \underbrace{v(x)}_{\textit{Abschreiben}} + \underbrace{u(x)}_{\textit{Abschreiben}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\textit{Ableiten}}$

Aber: Die Produktregel nur dann anwenden, wenn zwei Faktoren, die **beide *x*** enthalten, miteinander **multipliziert** werden.

$f(x) = 3x + \sin(x)$
$f'(x) = 3 \quad + \cos(x)$
(Keine Produktregel, da keine Multiplikation)

$f(x) = 3 \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$
(Produktregel unnötig, Faktor 3 enthält kein x)

$f(x) = 3x \cdot \sin(x)$
$f'(x) = 3 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x)$
(Produktregel)

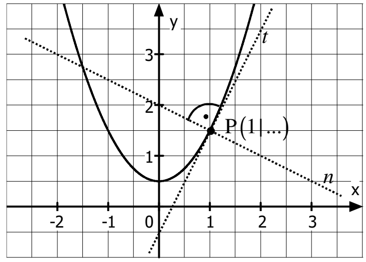
Nr.	Beispiel	Vorgehen
Anwendungen der Kettenregel		
10	$f(x) = (2x+3)^5$ $f'(x) = 5 \cdot (2x+3)^4 \cdot 2$ $= 10 \cdot (2x+3)^4$ $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^5}$ $= (x^2+3)^{-5}$ $f'(x) = -5 \cdot (x^2+3)^{-6} \cdot 2x$ $= -\frac{10x}{(2x+3)^6}$	$f(x) = (\mathit{Klammerinhalt})^{\mathit{Exponent}}$ $f'(x) = \mathit{Exponent} \cdot (\mathit{Klammerinhalt})^{\mathit{Exponent}-1} \cdot \mathit{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
11	$f(x) = e^{2x+3}$ $f'(x) = e^{2x+3} \cdot 2$	$f(x) = e^{\mathit{Exponent}}$ $f'(x) = e^{\mathit{Exponent}} \cdot \mathit{Exponent\ abgeleitet}$
12	$f(x) = \ln(2x+3)$ $f'(x) = \frac{1}{2x+3} \cdot 2$	$f(x) = \ln(\mathit{Klammerinhalt})$ $f'(x) = \frac{1}{\mathit{Klammerinhalt}} \cdot \mathit{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
13	$f(x) = \sin(2x+3)$ $f'(x) = \cos(2x+3) \cdot 2$	$f(x) = \sin(\mathit{Klammerinhalt})$ $f'(x) = \cos(\mathit{Klammerinhalt}) \cdot \mathit{Klammerinhalt\ abgeleitet}$
14	$f(x) = \cos(2x+3)$ $f'(x) = -\sin(2x+3) \cdot 2$	$f(x) = \cos(\mathit{Klammerinhalt})$ $f'(x) = -\sin(\mathit{Klammerinhalt}) \cdot \mathit{Klammerinhalt\ abgeleitet}$

Die allgemeine Kettenregel, aus welcher sich die Regeln 10-14 ergeben, lautet:

$$f(x) = u(v(x)) \rightarrow f'(x) = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{Äußere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{Innere Abl.}}$$

3.2 Tangente und Normale

1. Aufgabentyp



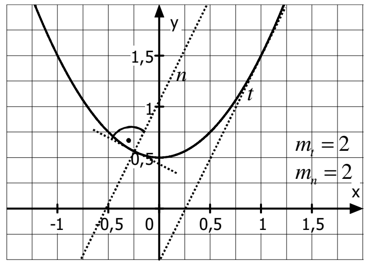
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 0{,}5$.

In $x = 1$ wird eine Tangente an das Schaubild angelegt. Berechnen Sie deren Gleichung.

In $x = 1$ wird eine Normale an das Schaubild angelegt. Berechnen Sie deren Gleichung.

Tangente im Kurvenpunkt (geg. $f(x)$ und x-Wert des Kurvenpunktes)	**Normale im Kurvenpunkt** (geg. $f(x)$ und x-Wert des Kurvenpunktes)
Vorgehen **1. y - Wert des Kurvenpunktes berechnen** $f(1) = 1^2 + 0{,}5 = 1{,}5 \quad \rightarrow \mathrm{P}(1 \mid 1{,}5)$ **2. Tangentensteigung berechnen** $f'(x) = 2x$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (= m_t)$ **3. Tangentengleichung berechnen** $y = m_t \cdot x + b$ $1{,}5 = 2 \cdot 1 + b$ $1{,}5 = 2 + b \quad \mid -2$ $-0{,}5 = b$ $\Rightarrow$ Tangente: $y = 2x - 0{,}5$ (Alternativ mit: $y = f'(u) \cdot (x-u) + f(u)$)	**Vorgehen** **1. y - Wert des Kurvenpunktes berechnen** $f(1) = 1^2 + 0{,}5 = 1 \quad \rightarrow \mathrm{P}(1 \mid 1{,}5)$ **2. Tangentensteigung berechnen** $f'(x) = 2x$ $f'(1) = 2 \cdot 1 = 2 \quad (= m_t)$ **3. Normalensteigung berechnen** **(senkrecht zu m_t $\rightarrow$ neg. Kehrwert)** $m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{2} = -0{,}5$ **4. Normalengleichung berechnen** $y = m_n \cdot x + b$ $1{,}5 = -0{,}5 \cdot 1 + b$ $1{,}5 = -0{,}5 + b \quad \mid +0{,}5$ $2 = b$ $\Rightarrow$ Normale: $y = -0{,}5x + 2$ (Alternativ mit: $y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$)

2. Aufgabentyp



Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x^2 + 0,5$.

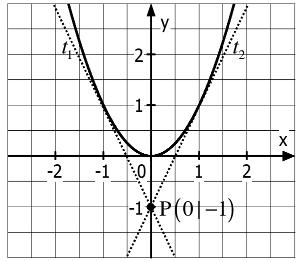
Es gibt eine Tangente an das Schaubild, welche die Steigung 2 besitzt. Berechnen Sie deren Gleichung.

Es gibt eine Normale an das Schaubild, welche die Steigung 2 besitzt. Berechnen Sie deren Gleichung.

Tangente mit gegebener Steigung (geg. $f(x)$ und Steigung der Tangente)	**Normale mit gegebener Steigung** (geg. $f(x)$ und Steigung der Normale)
Vorgehen	**Vorgehen**
	1. Zu m_n senkrechte Steigung berechnen $m = -\frac{1}{m_n} = -\frac{1}{2} = -0,5$
1. $f'(x) = m_t$ liefert x - Wert des Kurvenpunktes $f'(x) = 2x$ $f'(x) = m_t$ $2x = 2$ $x = 1$ (*An dieser Stelle hat die Parabel die gegebene Steigung.*)	**2. $f'(x) = m$ liefert x - Wert des Kurvenpunktes** $f'(x) = 2x$ $f'(x) = m$ $2x = -0,5$ $x = -0,25$ (*An dieser Stelle hat die Parabel die Steigung $-0,5$ und ist damit senkrecht zur gesuchten Normalen.*)
2. y - Wert des Kurvenpunktes berechnen $f(1) = 1^2 + 0,5 = 1,5 \quad \rightarrow \mathrm{B}(1 \mid 1,5)$	**3. y - Wert des Kurvenpunktes berechnen** $f(-0,25) = (-0,25)^2 + 0,5 = 0,5625$ $\rightarrow \mathrm{P}(-0,25 \mid 0,5625)$
3. Tangentengleichung berechnen $y = m_t \cdot x + b$ $1,5 = 2 \cdot 1 + b$ $1,5 = 2 + b \quad \mid -2$ $-0,5 = b$ $\Rightarrow$ Tangente: $y = 2x - 0,5$	**4. Normalengleichung berechnen** $y = m_n \cdot x + b$ $0,5625 = 2 \cdot (-0,25) + b$ $0,5625 = -0,5 + b \quad \mid +0,5$ $1,0625 = b$ $\Rightarrow$ Normale: $y = 2x + 1,0625$

3. Aufgabentyp

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=x^2$.
Zwei Tangenten an die Parabel verlaufen durch den Punkt $P(0|-1)$, welcher nicht auf der Parabel liegt.
Berechnen Sie deren Gleichungen.



<table>
<tr><th>Tangente von Punkt aus
(geg. $f(x)$ und Punkt, nicht auf Kurve)</th><th>Normale von Punkt aus
(geg. $f(x)$ und Punkt, nicht auf Kurve)</th></tr>
<tr><td>

Vorgehen

1. Allg. Tangentengleichung notieren

$y=f'(u)\cdot(x-u)+f(u)$

2. $f(u)$ und $f'(u)$ einsetzen

$f(x)=x^2;\quad f'(x)=2x$

$f(u)=u^2;\quad f'(u)=2u$

$y=2u\cdot(x-u)+u^2$

3. $P(0|-1)$ einsetzen und Gleichung nach u auflösen

$-1=2u\cdot(0-u)+u^2$

$-1=-2u^2+u^2$

$-1=-u^2 \quad |\cdot(-1)$

$1=u^2 \quad |\sqrt{}$

$u_1=-1;\quad u_2=1$

(x-*Werte der Berührpunkte*)

4. u-Werte in Tangentengleichung aus 2. einsetzen

$u_1=-1$ eingesetzt:

$y=2\cdot(-1)\cdot(x-(-1))+(-1)^2$

$y=-2x-1$ (1. Tangente)

$u_2=1$ eingesetzt:

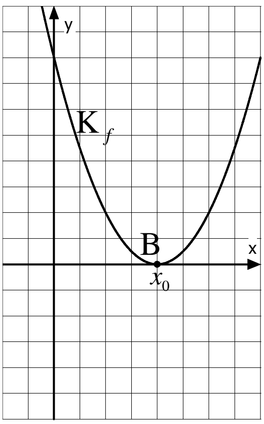
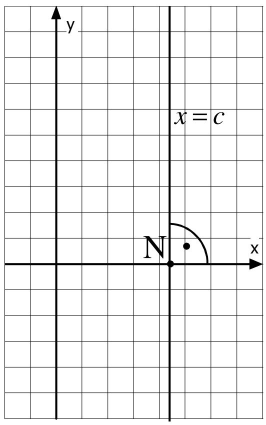
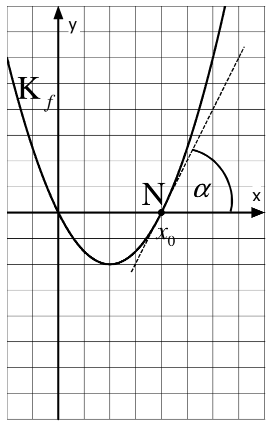
$y=2x-1$ (2. Tangente)

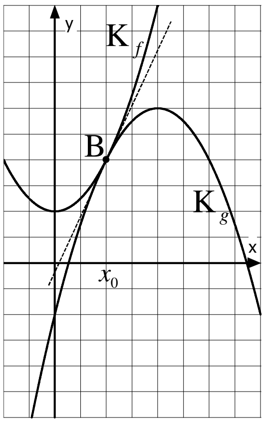
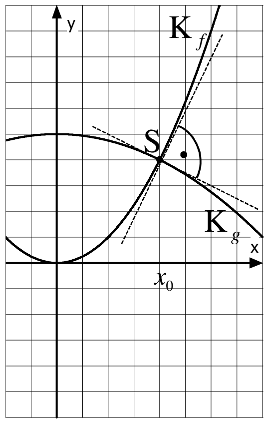
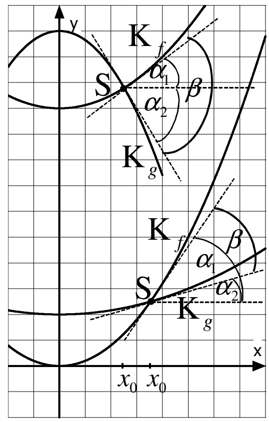
</td><td>

Dieser Aufgabentyp ist sehr unüblich und wird deshalb nicht behandelt.

</td></tr>
</table>

3.3 Schnittpunkte (Berührpunkt, senkrechter Schnitt, Schnittwinkel)

Zwischen Schaubild und x - Achse $\left(\textbf{Ansatz: } f(x) = 0\right)$		
Berührpunkt	**Senkrechter Schnitt**	**Schnittwinkel**
		
Beschreibung mit $f'(x)$ Hier gelten: **1. $f(x_0) = 0$ (*Nullstelle*)** **2. $f'(x_0) = 0$ (*Steigung* 0)** bzw. **Beschreibung ohne $f'(x)$** (für ganzrat. Funktionen) x_0 ist **doppelte** (bzw. dreifache oder vierfache, S. 11) **Lösung von $f(x) = 0$** (*Diskriminante = 0 bei quadratischer Gleichung für doppelte Lösung!*)	**Bemerkung** Bei Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, möglich. (z.B. $x = 2,2$)	**Vorgehen zur Berechnung** **1. m berechnen** $f'(x_0) = m$ (Steigung K_f) **2. α berechnen** $m = \tan(\alpha) \quad \mid \tan^{-1}$ $\alpha = \left\|\tan^{-1}(m)\right\|$ ($\| \;\|$ *steht für den Betrag. Dieser wird verwendet, da das Vorzeichen des Winkels nicht relevant ist.*) **Achtung** WTR hierfür von Bogenmaß (*rad*) auf Winkelmaß (*deg*) stellen!

<table>
<tr><th colspan="3">Zwischen zwei Schaubildern $\left(\textbf{Ansatz:}\ f(x) = g(x)\right)$</th></tr>
<tr><th>Berührpunkt</th><th>Senkrechter Schnitt</th><th>Schnittwinkel</th></tr>
<tr>
<td></td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Beschreibung mit $f'(x)$
Hier gelten:
1. $f(x_0) = g(x_0)$
(gemeinsamer Punkt)
2. $f'(x_0) = g'(x_0)$
(gleiche Steigung)

bzw.

Beschreibung ohne $f'(x)$
(für ganzrat. Funktionen)
x_0 ist doppelte (bzw. dreifache oder vierfache)
Lösung von $f(x) = g(x)$
(Diskriminante = 0 bei quadratischer Gleichung für doppelte Lösung!)</td>
<td>Beschreibung (mit $f'(x)$)
Hier gelten:
1. $f(x_0) = g(x_0)$
(gemeinsamer Punkt)
2. $f'(x_0) = \frac{-1}{g'(x_0)}$
(allg. $m_2 = -1/m_1$ bzw. Steigungen sind negative Kehrwerte voneinander)</td>
<td>Vorgehen zur Berechnung
1. m_1 und m_2 berechnen
$f'(x_0) = m_1$ (Steigung K_f)
$g'(x_0) = m_2$ (Steigung K_g)
2. α_1 und α_2 berechnen
$m_1 = \tan(\alpha_1) \quad \mid \tan^{-1}$
$\alpha_1 = \left|\tan^{-1}(m_1)\right|$
(Steigungswinkel K_f)
$m_2 = \tan(\alpha_2) \quad \mid \tan^{-1}$
$\alpha_2 = \left|\tan^{-1}(m_2)\right|$
(Steigungswinkel K_g)
3. β berechnen
$\beta = \alpha_1 + \alpha_2$ (oberes Bsp.)
bzw.
$\beta = \alpha_1 - \alpha_2$ (unteres Bsp.)

Alternativ kann auch mit nachfolgender Formel gearbeitet werden:
$\beta = \tan^{-1}\left|\frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0) \cdot g'(x_0)}\right|$</td>
</tr>
</table>