4 Abstände

Abstand zwischen zwei Punkten

Zur Bestimmung des Abstands *d* zweier Punkte A und B wird zunächst der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ gebildet und anschließend sein Betrag berechnet.

Abstand zwischen Punkt und Gerade

Zur Bestimmung des Abstands *d* zwischen einem Punkt P und einer Geraden *g* bildet man eine Hilfsebene E für die gilt:

a) Der Normalenvektor von E ist gleich dem Richtungsvektor der Geraden *g*.
b) Der Punkt P liegt in der Hilfsebene E.

Anschließend wird der Schnittpunkt S von der Gerade *g* und der Hilfsebene E berechnet.

Der gesuchte Abstand *d* zwischen dem Punkt P und der Geraden *g* ist gleich dem Abstand zwischen dem Punkt P und dem Schnittpunkt S.

Beispiel: Berechnen Sie den Abstand zwischen dem Punkt $\mathrm{P}(-8 \mid 11 \mid 10)$ und der Geraden $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Die Berechnung erfolgt mit der Hilfsebene E, die als Normalenvektor den Richtungsvektor der Geraden *g* besitzt und in welcher der Punkt P liegt:

$$\mathrm{E}\colon \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ 10 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Einsetzen der Koordinaten der Geraden *g* in diese Hilfsebene ergibt sich:

$$\left(\begin{pmatrix}4\\-4\\4\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\11\\10\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix}12-8s\\-15+4s\\-6+s\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\Rightarrow\ -162+81s=0 \quad\Rightarrow\quad s=2$$

Setzt man die Lösung $s=2$ in die Geradengleichung ein, ergibt sich der Schnittpunkt von der Gerade *g* und der Hilfsebene E: $S(-12\mid 4\mid 6)$

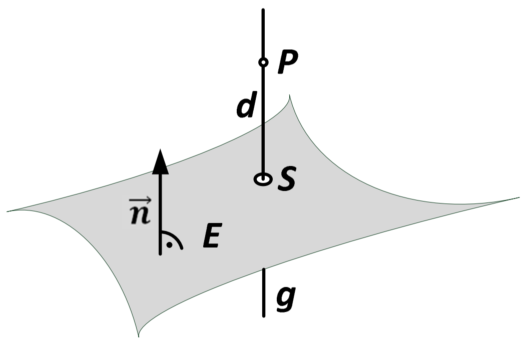
Der Abstand *d* zwischen den Punkten P und S und somit der Abstand *d* zwischen dem Punkt *P* und der Gerade *g* beträgt:

$$=\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right|=\sqrt{(-12+8)^2+(4-11)^2+(6-10)^2}=\sqrt{81}=9$$

Abstand zwischen Punkt und Ebene

Zur Bestimmung des Abstands *d* zwischen einem Punkt P und einer Ebene E bildet man eine Hilfsgerade *g* für die gilt:

a) Der Richtungsvektor der Geraden *g* ist gleich dem Normalenvektor von E.
b) Der Punkt P liegt auf der Hilfsgeraden *g*.



Anschließend wird der Schnittpunkt S von der Gerade *g* und der Hilfsebene E berechnet.

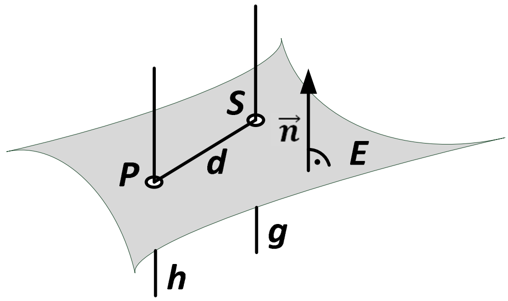
Der gesuchte Abstand *d* zwischen dem Punkt P und der Ebene E ist gleich dem Abstand zwischen dem Punkt P und dem Schnittpunkt S.

Häufig ist es einfacher, den Abstand *d* zwischen dem Punkt $\mathrm{A}(a_1|a_2|a_3)$ und der Ebene $\mathrm{E}\colon n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3=b$ mit Hilfe der **Formel aus der Merkhilfe** zu berechnen:

$$=\left|\frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}}\right|$$

Abstand zwischen zwei parallelen Geraden

Zur Bestimmung des Abstandes *d* zwischen zwei parallelen Geraden *g* und *h,* wählt man einen Punkt P, der auf der Geraden *h* liegt, und bestimmt seinen Abstand von der Geraden *g*.



Diese Berechnung ist bereits oben beschrieben (Bestimmung des Abstands zwischen Punkt und Gerade mit einer Hilfsebene).

Beispiel: Gegeben sind die zwei parallelen Geraden *g* und *h*. Bestimmen Sie den Abstand der beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Hilfsebene, in der der Punkt $\mathrm{P}(1 \mid 2 \mid 5)$ liegt und die orthogonal zu den beiden Geraden *g* und *h* liegt lautet:

$$\mathrm{E}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Durch Einsetzen der Koordinaten der Gerade *g* in diese Hilfsebene ergibt sich:

$$\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow s = 1$$

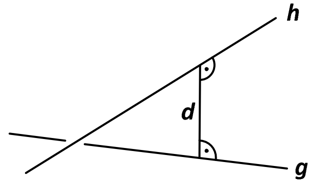
Setzt man die Lösung $s = 1$ in die Geradengleichung von *g* ein, ergibt sich ihr Schnittpunkt mit der Hilfsebene E: $\mathrm{S}(5 \mid 5 \mid 5)$

Der Abstand *d* zwischen den Punkten P und S und somit der Abstand zwischen den Geraden *g* und *h* beträgt:

$$= \left| \overrightarrow{\mathrm{PS}} \right| = \sqrt{(5-1)^2 + (5-2)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{25} = 5$$

Abstand zwischen zwei windschiefen Geraden

Zur Bestimmung des kürzesten Abstands *d* zweier windschiefer Geraden *g* und *h* mit



$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$

wird die **Formel aus der Merkhilfe** verwendet:

$$= \left|\frac{(\vec{q}-\vec{p})\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|}\right| \text{ mit } \vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$$

Beispiel: Gegeben sind die zwei windschiefe Geraden *g* und *h*. Bestimmen Sie den kürzesten Abstand *d* der beiden Geraden:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

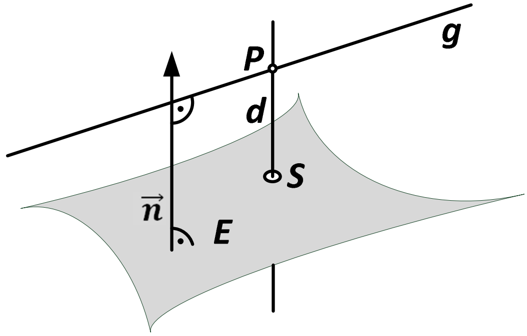
$$= \left| \frac{\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}} \right| = \left| \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}} \right| = \left| \frac{12-4}{\sqrt{4^2+0^2+(-4)^2}} \right| = \left| \frac{8}{\sqrt{32}} \right| = \sqrt{2} \text{ LE}$$

Abstand zwischen Gerade und paralleler Ebene

Zur Bestimmung des Abstands d zwischen einer Geraden g und einer parallelen Ebene E wählt man einen Punkt P, der auf der Geraden liegt.

Der gesuchte Abstand d ist gleich dem Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E.

Diese Berechnung ist bereits oben beschrieben (Bestimmung des Abstands zwischen Punkt und Ebene).



Beispiel: Gegeben sind die Ebene E: $-2x_1 + x_2 - 2x_3 = -15$ und die zu dieser Ebene parallele Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -16 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie den Abstand der Geraden g von der Ebene E.

Als Punkt P dient der Stützpunkt P(2 | −16 | 2) der Geraden g. Da die Ebene bereits in der Koordinatenform gegeben ist, ergibt sich der gesuchte Abstand d aus:

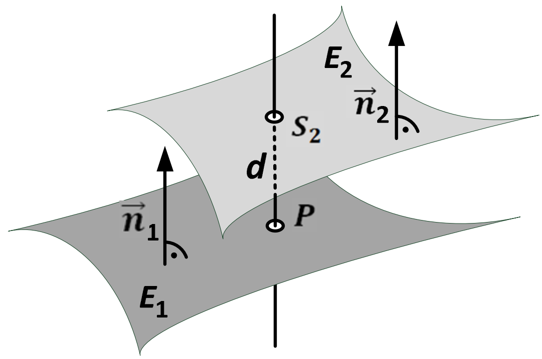
$$= \left| \frac{-2 \cdot 2 - 1 \cdot 16 - 2 \cdot 2 + 15}{\sqrt{(-2)^2 + 1^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{-9}{\sqrt{9}} \right| = 3$$

Abstand zwischen zwei parallelen Ebenen

Zur Bestimmung des Abstands *d* zwischen zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2 wählt man einen Punkt P, der auf der Ebene E_1 liegt.

Der gesuchte Abstand *d* ist gleich dem Abstand zwischen dem Punkt P und der Ebene E_2.

Diese Berechnung ist bereits oben beschrieben (Bestimmung des Abstands zwischen Punkt und Ebene)



Beispiel: Gegeben sind die beiden parallelen Ebenen E und F. Bestimmen Sie den Abstand der Ebenen $\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ und $\mathrm{F}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix} = 0.$

Als Punkt P dient der Stützpunkt $\mathrm{P}(1|1|0)$ der Ebene E. Die Ebene F lautet in der Koordinatenform: $\mathrm{F}: 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$

Hieraus ergibt sich der gesuchte Abstand *d*:

$$= \left|\frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 0 - 8}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}}\right| = \left|\frac{-4}{\sqrt{9}}\right| = \frac{4}{3}$$