

3.2 Gegenseitige Lage von Gerade und Ebene

Die gegenseitige Lage von einer Geraden zu einer Ebene lässt sich mit dem folgenden Schema bestimmen:

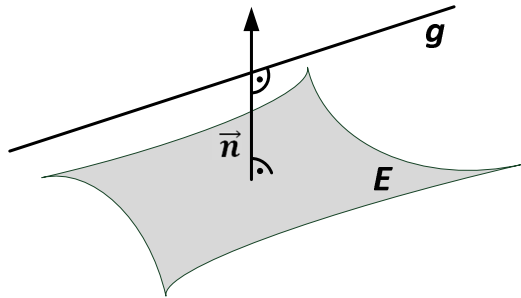
- Zunächst wird anhand des Normalenvektors der Ebene und des Richtungsvektors der Geraden untersucht, ob die Gerade parallel zur Ebene liegt.
- Falls dieses zutrifft, und die Gerade mit der Ebene auch noch einen gemeinsamen Punkt besitzt, liegt die Gerade in der Ebene. (Für diese Überprüfung eignet sich am einfachsten der Stützpunkt der Geraden.)
- Falls die Gerade nicht parallel zur Ebene verläuft, besitzen Gerade und Ebene genau einen Schnittpunkt. In diesem Fall kann noch zusätzlich überprüft werden, ob die Gerade senkrecht zur Ebene verläuft.

Gerade parallel zur Ebene

Die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und die Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ sind parallel, wenn der Richtungsvektor der Geraden **senkrecht** zum Normalenvektor der Ebene steht.

In diesem Fall ist das Skalarprodukt aus Richtungsvektor und Normalenvektor gleich Null:

$$\vec{b} \cdot \vec{n} = 0$$



Beispiel: Gegeben sind die Ebene $E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$ und die

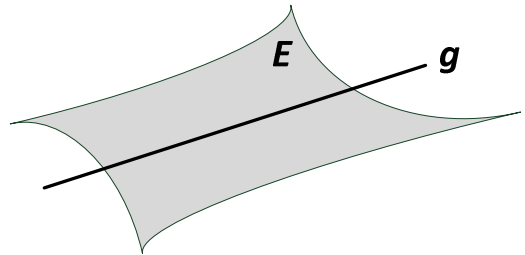
Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass E und g parallel zueinander sind.

Das Skalarprodukt vom Richtungsvektor der Geraden und dem Normalenvektor der Ebene

ergibt: $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 8 - 4 - 4 = 0$. Daher sind E und g zueinander parallel.

Gerade liegt in Ebene

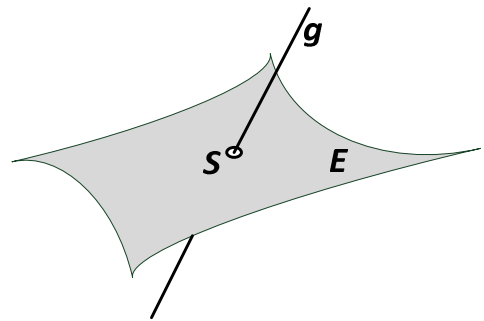
Die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ liegt in der Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$, wenn die Gerade **parallel** zur Ebene ist und die Gerade mit der Ebene einen **gemeinsamen Punkt** besitzt.



Schnittpunkt von Gerade und Ebene

Die Gerade g und die Ebene E haben einen Schnittpunkt, wenn es eine **gültige Lösung** gibt für:

$$g = E$$



Beispiel: Um einen möglichen Schnittpunkt der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und der in der Parameterform angegebenen Ebene $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu berechnen, werden die Gerade und die Ebene gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Hierdurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

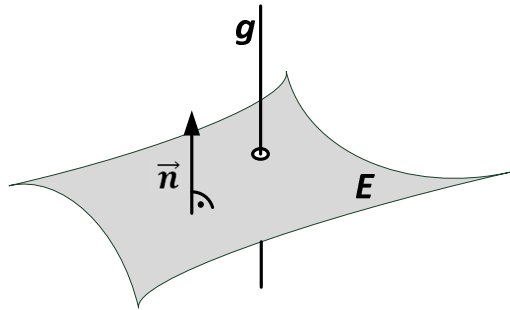
$$\begin{array}{ll} \text{I} & 2r - 2s - 2t = 0 \\ \text{II} & -3r + s + 2t = -3 \\ \text{III} & r - s + t = 2 \end{array}$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung: $r = 2$, $s = 1$ und $t = 1$. Durch Einsetzen von r in die Geradengleichung erhält man den Schnittpunkt $S(6 | -3 | 1)$.

Gerade senkrecht zur Ebene

Die Gerade $g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und die Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ stehen zueinander senkrecht, wenn der **Richtungsvektor der Geraden** ein **Vielfaches des Normalenvektors** der Ebene ist:

$$r \cdot \vec{b} = \vec{n}$$



Beispiel: Die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ steht senkrecht zu der Ebene

$E: 4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3$, weil der Richtungsvektor der Geraden ein Vielfaches des Normalenvektors der Ebene ist:

$$r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow r = -2$$

3.3 Gegenseitige Lage zweier Ebenen

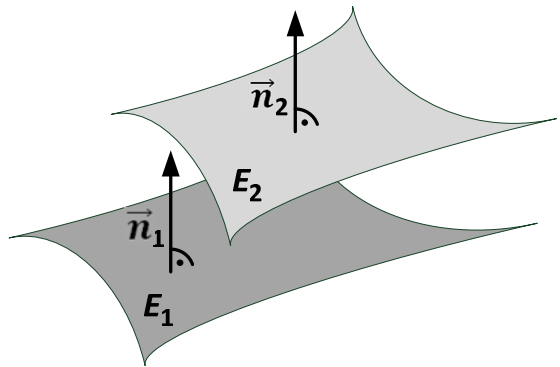
Die gegenseitige Lage zweier Ebenen lässt sich mit dem folgenden Schema bestimmen:

- Zunächst wird anhand der Normalenvektoren geprüft, ob die Ebenen zueinander parallel liegen.
- Falls dieses zutrifft, und die Ebenen auch noch einen gemeinsamen Punkt besitzen, sind die Ebenen identisch. (Für diese Überprüfung eignet sich am einfachsten einer der beiden Stützpunkte der Ebenen.)
- Falls die Ebenen nicht zueinander parallel liegen, besitzen sie eine Schnittgerade.

Parallele Ebenen

Zwei Ebenen sind parallel, wenn der **Normalenvektor** der einen Ebene ein **Vielfaches des Normalenvektors** der anderen Ebene ist:

$$\vec{n}_1 = s \cdot \vec{n}_2$$



Beispiel: Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F parallel sind.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } F: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

Der Normalenvektor der Ebene E ergibt sich aus dem Kreuzprodukt ihrer

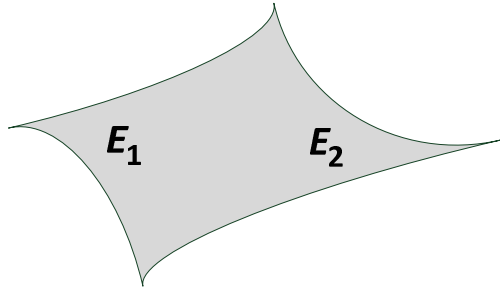
$$\text{Richtungsvektoren: } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ -2 - 0 \\ 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Ebenen sind parallel, da der Normalenvektor der Ebene E ein Vielfaches des

$$\text{Normalenvektors der Ebene F ist: } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Identische Ebenen

Zwei Ebenen sind identisch, wenn sie **parallel** sind und zusätzlich einen **gemeinsamen Punkt** besitzen.



Beispiel: Zeigen Sie, dass die Ebenen E und F identisch sind.

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad F: 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4.$$

Der Normalenvektor der Ebene E ergibt sich aus dem Kreuzprodukt ihrer Richtungsvektoren:

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2 \\ 2 + 2 \\ -4 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \vec{n}_F$$

Die Ebenen sind parallel, da die Normalenvektoren beider Ebenen ein Vielfaches voneinander (und in diesem Fall sogar identisch) sind.

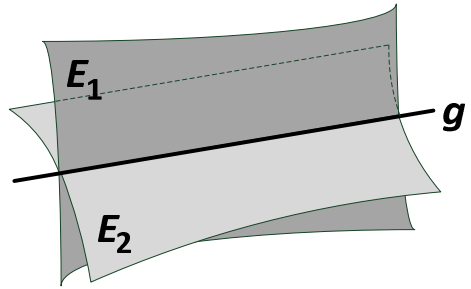
Das Einsetzen der Koordinaten des Stützpunktes der Ebene E in die Ebene F ergibt eine gültige Aussage: $3 \cdot 2 + 4 \cdot 0 - 2 \cdot 1 = 4$

Die Ebenen sind identisch, weil sie parallel sind und zusätzlich der Stützpunkt der Ebene E in der Ebene F liegt.

Schnittgerade zweier Ebenen

Falls zwei Ebenen eine gemeinsame Schnittgerade besitzen, gilt für diese Schnittgerade:

$$E_1 = E_2$$



Beispiel: Gegeben sind die Ebenen E: $4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$ und F: $x_2 + 2x_3 = 8$. Berechnen Sie eine Gleichung der Schnittgeraden.

Die beiden Ebenengleichungen werden als Lineares Gleichungssystem betrachtet.

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 4 \\ \text{II} & x_2 + 2x_3 = 8 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt die drei Variablen x_1 , x_2 und x_3 aber nur zwei Gleichungen und ist somit nicht eindeutig lösbar. Daher wird für die Variable x_3 ein Parameter gewählt: $x_3 = t$. Hierdurch erhält man:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & 4x_1 - x_2 + 2t = 4 \\ \text{II} & x_2 + 2t = 8 \end{array}$$

Aus Gleichung II ergibt sich eine Lösung für x_2 , die anschließend in Gleichung I eingesetzt wird. Hierdurch erhält man:

$$\begin{aligned} x_1 &= 3 - t \\ x_2 &= 8 - 2t \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Durch Umschreiben der Gleichungen ergibt sich der Ortsvektor aller gemeinsamen

Punkte: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - t \\ 8 - 2t \\ t \end{pmatrix}$

Die Schnittgerade beider Ebenen lautet: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.