3 Gegenseitige Lage

3.1 Gegenseitige Lage zweier Geraden

Die gegenseitige Lage zweier Geraden lässt sich mit dem folgenden Schema bestimmen:

- Zunächst wird anhand der Richtungsvektoren der Geraden geprüft, ob sie zueinander parallel laufen.
- Falls dieses zutrifft, und die Geraden auch noch einen gemeinsamen Punkt besitzen, sind sie identisch.
- Falls die Geraden nicht zueinander parallel laufen, schneiden sie sich entweder in genau einem Schnittpunkt oder sie verlaufen windschief zueinander.

Parallele Geraden

Zwei Geraden

$g: \vec{x} = \vec{a} \quad \cdot \vec{b}$ und

$h: \vec{x} = \vec{c} \quad s \cdot \vec{d} \qquad (\text{mit } \;, s \in R)$

sind parallel, wenn sich der eine Richtungsvektor durch ein **Vielfaches** des anderen Richtungsvektors darstellen lässt: $\cdot \vec{b} = \vec{d}$

Identische Geraden

Zwei Geraden

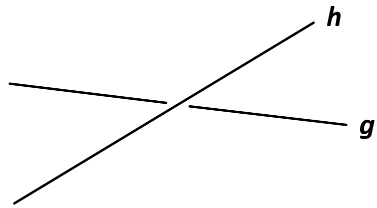
$g: \vec{x} = \vec{a} \quad \cdot \vec{b}$ und

$h: \vec{x} = \vec{c} \quad s \cdot \vec{d} \qquad (\text{mit } \;, s \in R)$

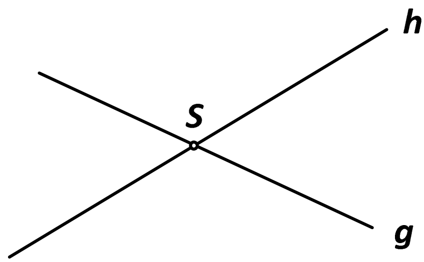
sind identisch, wenn sie **parallel** sind und zusätzlich einen **gemeinsamen Punkt** besitzen.

Windschiefe Geraden

Zwei Geraden sind windschief, wenn sie **nicht parallel** sind und auch **keinen gemeinsamen Punkt** besitzen.



Geraden schneiden sich



Zwei Geraden

$g: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und
$h: \vec{x} = \vec{c} + s \cdot \vec{d}$ $\quad$ (mit $r, s \in R$)

besitzen einen Schnittpunkt, wenn sich durch Gleichsetzen der Geradengleichungen eine **gültige Lösung** für die Koeffizienten *r* und *s* ergibt.
Den Schnittpunkt erhält man durch Einsetzen der Koeffizienten *r* bzw. *s* in die jeweilige Geradengleichung.

Beispiel: Um einen möglichen Schnittpunkt der Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu berechnen, werden die beiden Geraden gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Hierdurch ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lrl} \text{I} & 2r - 2s = -4 & \\ \text{II} & r - s = -2 & \\ \text{III} & -s = 0 & \Rightarrow s = 0 \\ & & \\ \text{I} & 2r - 2s = -4 & \Rightarrow r = -2 \\ \text{II} & r - s = -2 & \Rightarrow r = -2 \end{array}$$

Durch Einsetzen von $r = -2$ bzw. $s = 0$ in die jeweilige Geradengleichung ergibt sich der Schnittpunkt $\mathrm{S}(1|3|1)$.