2 Geraden und Ebenen

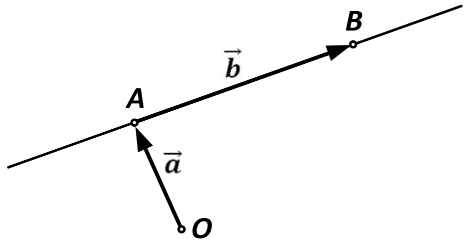
2.1 Gerade in Parameterform

Eine Gerade wird durch zwei Punkte A und B definiert, die auf der Geraden liegen. Diese Gerade lässt sich mit dem Stützvektor $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ beschreiben.

$\boldsymbol{g}: \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{r} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} \quad \text{mit } r \in R$

Stützvektor $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

Richtungsvektor $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$



Beispiel: Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}(3|3|1)$ und $\mathrm{B}(2|-1|-2)$. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden, in der die Punkte liegen.

$\mathrm{E}: \vec{x} = \overrightarrow{0\mathrm{A}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

$\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$

2.2 Ebene in Parameterform

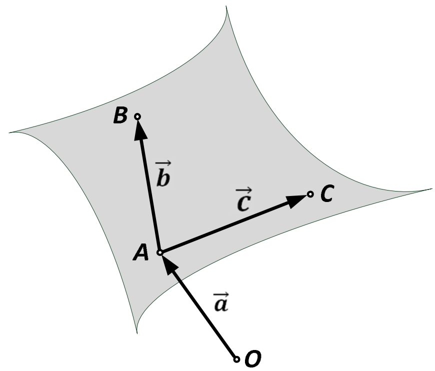
Eine Ebene wird durch drei Punkte A, B und C definiert, die in der Ebene liegen. Diese Ebene lässt sich mit dem Stützvektor $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ und den Spannvektoren $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ und $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ beschreiben.

$\mathbf{E}: \vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{r} \cdot \vec{\boldsymbol{b}} + \boldsymbol{s} \cdot \vec{\boldsymbol{c}}$ mit $r, s \in R$

Stützvektor $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$

Spannvektor $\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

Spannvektor $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$



Beispiel: Gegeben sind die Punkte $\mathrm{A}(3|3|1)$, $\mathrm{B}(2|-1|-2)$ und $\mathrm{C}(6|3|2)$. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene, in der die Punkte liegen.

$$\mathrm{E}: \vec{x} = \overrightarrow{0\mathrm{A}} + r \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-3 \\ -1-3 \\ 2-1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6-3 \\ 3-3 \\ 2-1 \end{pmatrix}$$

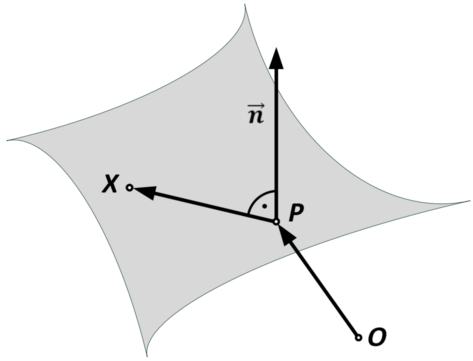
$$\mathrm{E}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Statt der drei Punkte, kann eine Ebene auch definiert werden durch:

- eine Gerade und ein Punkt, der nicht auf der Geraden liegt
- zwei echt parallele Geraden
- zwei sich schneidende Geraden

2.3 Ebene in Normalenform

Eine Ebene E kann auch durch einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene steht (Normalenvektor), und einen Punkt P, der in der Ebene liegt, definiert werden.



Der Vektor vom Punkt P zu einem beliebigen Punkt X in der Ebene $(\vec{x} - \vec{p})$ steht senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$.

Das Skalarprodukt senkrechter Vektoren ist gleich Null. Daher lautet die **Normalengleichung** der Ebene:

$\mathbf{E}: (\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{p}}) \cdot \vec{\boldsymbol{n}} = \mathbf{0}$

Beispiel

Gegeben ist die Ebene E in Parameterform mit E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Geben Sie eine Normalenform der Ebenengleichung an.

Der Normalenvektor dieser Ebene ergibt sich aus dem Kreuzprodukt ihrer Spannvektoren:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4+0 \\ -9+1 \\ 0+12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Eine Normalengleichung der Ebene lautet daher (z. B. mit Stützpunkt eingesetzt):

$\mathrm{E}: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$$\mathrm{E}: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

2.4 Ebene in Koordinatenform

Als weitere Möglichkeit kann eine Ebene E durch ihre **Koordinatengleichung** definiert werden. Sie ergibt sich durch Ausmultiplizieren der Normalengleichung:

$$\mathbf{E}:\ \boldsymbol{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = d}$$

Beispiel

Gegeben ist die Ebene E in Normalenform mit E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$. Geben Sie eine Koordinatenform der Ebenengleichung an.

Ausmultiplizieren:

$$\mathrm{E}:\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} = 0$$

$$\mathrm{E}:\ -4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = 3 \cdot (-4) + 3 \cdot (-8) + 1 \cdot 12$$

$$\mathrm{E}:\ -4x_1 - 8x_2 + 12x_3 = -24$$