III. Vektorgeometrie

1 Rechenregeln

Vektor und Betrag

Vektoren sind ortsunabhängige Größen, die über einen Betrag (bzw. Länge) und eine Richtung definiert sind. Im dreidimensionalen, rechtwinkligen Koordinatensystem werden Vektoren durch ein Zahlentripel dargestellt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Dieses Zahlentripel beschreibt die geradlinige Verschiebung eines Punktes (bzw. einer Punktmenge), die sich aus drei einzelnen Verschiebungen entlang der drei Koordinatenachsen zusammensetzt. Der Betrag eines Vektors (bzw. die Länge dieser Verschiebung) berechnet sich aus:

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

Einheitsvektor

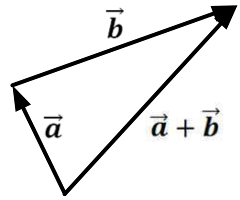
Ein Vektor mit der Länge Eins wird Einheitsvektor genannt. Man erhält ihn durch Division des Vektors durch seinen Betrag:

$$\overrightarrow{x_0} = \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} = \frac{1}{|\vec{x}|} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_1}{|\vec{x}|} \\ \frac{x_2}{|\vec{x}|} \\ \frac{x_3}{|\vec{x}|} \end{pmatrix}$$

Addition

Die Addition zweier Vektoren ergibt wieder einen Vektor:

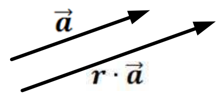
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$$



Multiplikation

Bei der Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (auch Skalar genannt) ändert sich der Betrag (bzw. die Länge) des Vektors. Bei einem positiven Skalar bleibt seine Richtung unverändert, bei einem negativen Skalar kehrt sich seine Richtung um.

$$r \cdot \vec{a} = r \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in R$$

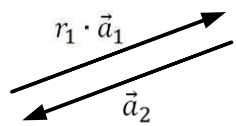


Lineare Abhängigkeit

Zwei Vektoren

Zwei Vektoren sind linear abhängig, wenn sich der eine Vektor durch ein Vielfaches des anderen Vektors darstellen lässt. In diesem Fall sind sie auch parallel zueinander:

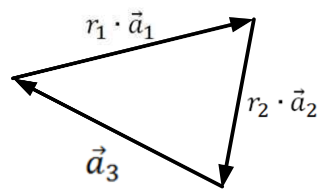
$$r_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{a}_2 \quad \text{mit } r_1 \in R$$



Drei Vektoren

Drei Vektoren sind linear abhängig, wenn sie in einer Ebene liegen:

$$r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{a}_3 \quad \text{mit } r_1, r_2 \in R$$

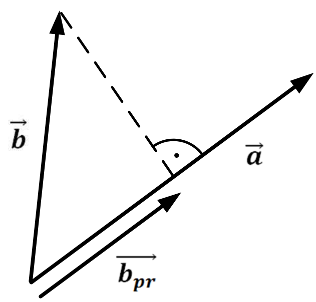


Skalarprodukt

Das Produkt zweier Vektoren ergibt eine reelle Zahl, das sogenannte Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Geometrisch entspricht dieses Skalarprodukt der senkrechten Projektion des Vektors $\vec{b}$ auf den Vektor $\vec{a}$. Zwei Vektoren stehen senkrecht zueinander, wenn ihr Skalarprodukt Null ergibt:

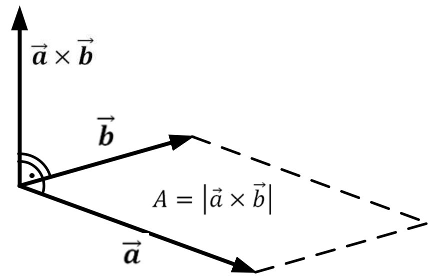


$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Longrightarrow \vec{a} \text{ senkrecht zu } \vec{b}$$

Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren ergibt einen Vektor, der senkrecht zu den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ steht.

Der Betrag des Kreuzproduktes entspricht der Fläche des Parallelogramms, welches durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird.



Als Merkregel zur Berechnung des Kreuzproduktes kann man die beiden Vektoren zweimal untereinander schreiben. Die obere und untere Zeile wird für die Rechnung nicht weiter verwendet und daher durchgestrichen. Anschließend werden die verbleibenden Koordinaten kreuzweise miteinander multipliziert und subtrahiert:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{a_1 \quad b_1} \\ a_2 \quad b_2 \\ a_3 \quad b_3 \\ a_1 \quad b_1 \\ a_2 \quad b_2 \\ \cancel{a_3 \quad b_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 \cdot b_3 - a_3 \cdot b_2 \\ a_3 \cdot b_1 - a_1 \cdot b_3 \\ a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1 \end{pmatrix}$$

Beispiel: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - (2 \cdot 1) \\ 2 \cdot (-1) - 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Das Kreuzproduckt eignet sich gut zur Bestimmung von Flächen, bei denen die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ein Parallelogramm aufspannen. Die Halbierung dieser Fläche ergibt den Flächeninhalt eines Dreiecks:

$$\mathrm{A}_{Parallelogramm} = |\vec{a} \times \vec{b}| \qquad \mathrm{A}_{Dreieck} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$