2.3 Trigonometrische Funktionen

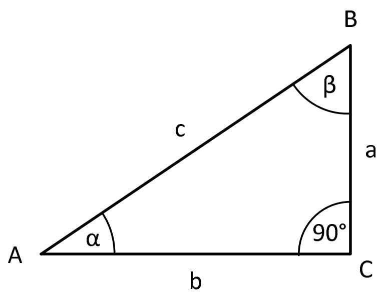
Grundlagen

Die Trigonometrie beschreibt das Verhältnis von Winkeln und Seitenlängen in rechtwinkligen Dreiecken.

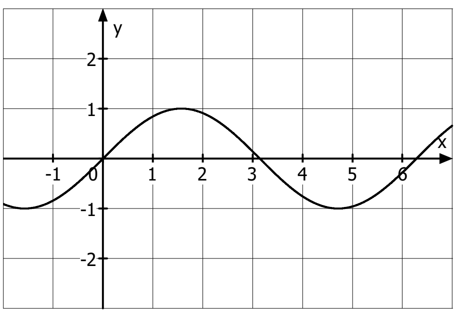
$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse} = \frac{a}{c}$$

$$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse} = \frac{b}{c}$$

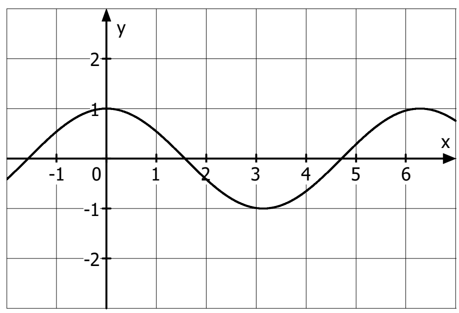
$$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete} = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{a}{b}$$



Grundfunktionen



$f(x) = \sin(x)$



$f(x) = \cos(x)$

Die Periodenlänge, also die Dauer eines „Durchlaufes“, beträgt $2\pi \approx 6{,}3$.

Allgemeine Sinus- bzw. Kosinusfunktion

$f(x) = a \cdot \sin\big(b \cdot (x - c)\big) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos\big(b \cdot (x - c)\big) + d$

Bedeutung der Koeffizienten

a Gibt die Streckung in y-Richtung bzw. die Amplitude an.

b Entscheidet die Periodenlänge (p). Es gilt: $b = \frac{2\pi}{p}$ bzw. $p = \frac{2\pi}{b}$

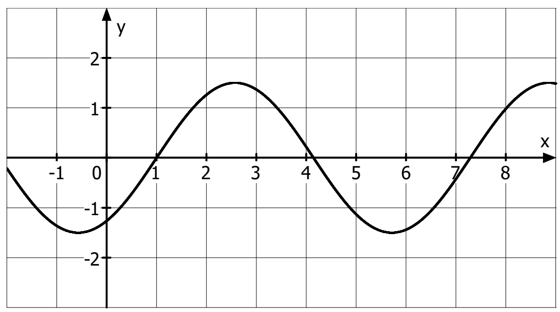
c Gibt Verschiebung nach rechts bzw. links an

d Gibt Verschiebung nach oben bzw. unten an

Beispiele

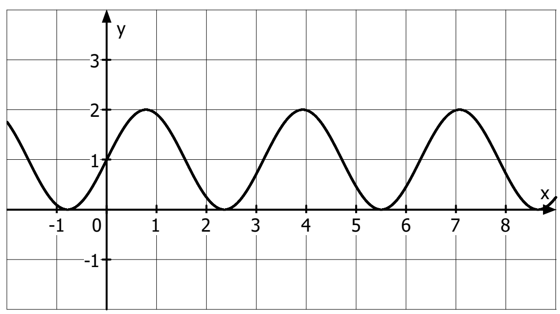
$f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(x - 1)$

um 1,5 in y-Richtung gestreckt;
um 1 nach rechts verschoben



$f(x) = \sin(2 \cdot x) + 1$

um 1 nach oben verschoben;
veränderte Periodenlänge:
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$



Aufgabe (aus Abiturprüfung 2016/2017)

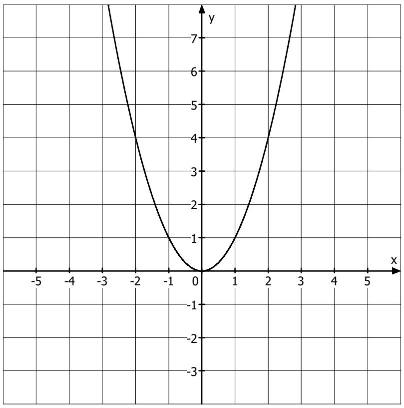
Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2)$ aus dem Schaubild von p mit $p(x) = \cos(x)$ hervorgeht.

Das Schaubild geht durch Spiegelung an der x-Achse und durch Verschiebung um 2 EH nach links hervor.

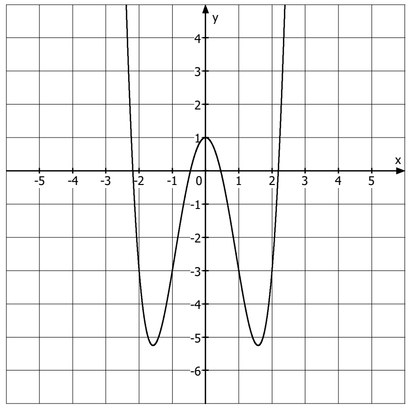
2.4 Symmetrie

Achsensymmetrie

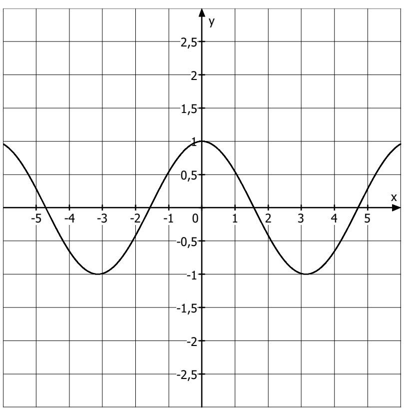
Der Graph einer Funktion ist symmetrisch zur y-Achse wenn gilt: $\boldsymbol{f(-x) = f(x)}$



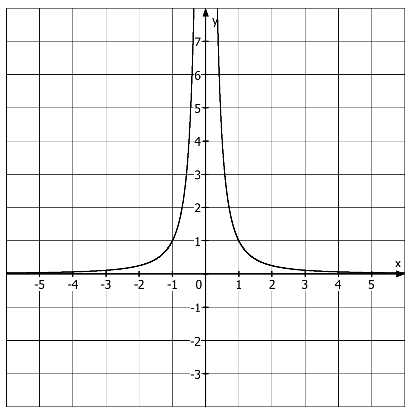
$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$



$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 1$$
$$f(-x) = (-x)^4 - 5 \cdot (-x)^2 + 1 = f(x)$$



$$f(x) = \cos(x)$$
$$f(-x) = \cos(-x) = \cos(x) = f(x)$$

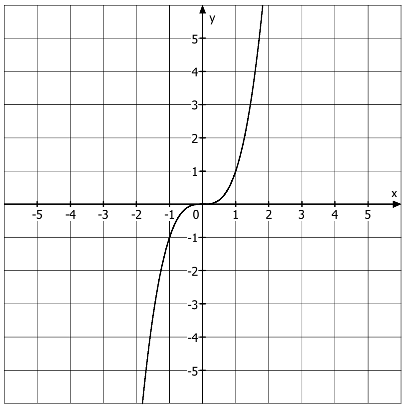


$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$
$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$$

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion ist **symmetrisch zur y-Achse**, wenn der Funktionsterm **nur gerade Exponenten** besitzt (z.B. $f(x) = ax^4\ cx^2$).

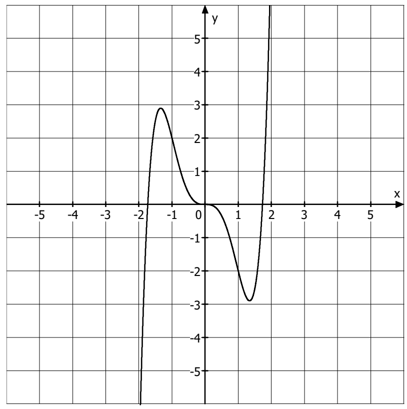
Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion ist symmetrisch zum Ursprung wenn gilt: $\boldsymbol{f(-x) = -f(x)}$



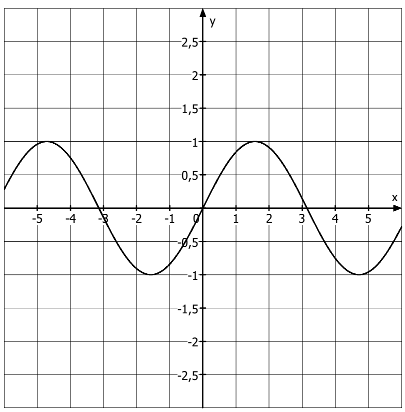
$f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



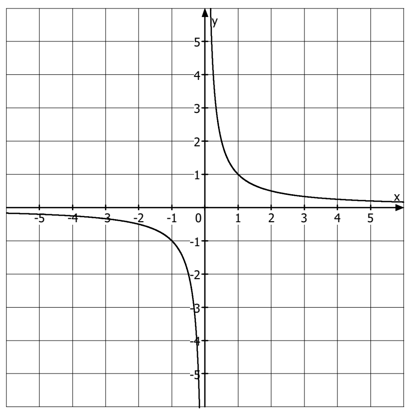
$f(x) = x^5 - 3x^3$

$f(x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 = -(x^5 - 3x^3) = -f(x)$



$f(x) = \sin(x)$

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin(x) = -f(x)$



$f(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(-x) = \dfrac{1}{(-x)} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**, wenn der Funktionsterm **nur ungerade Exponenten besitzt** (z. B. $f(x) = ax^3 + cx$).