2 Stochastik 2

2.1 Fakultät und Binomialkoeffizient

Zur Berechnung der Binomialverteilung mit Hilfe der Bernoulliformel benötigt man Fakultäten und Binomialkoeffizienten.

Fakultät

Das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis *n* wird Fakultät genannt: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

$0! = 1$

$1! = 1$

$2! = 1 \cdot 2 = 2$

$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$

$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$

Binomialkoeffizient

Der Ausdruck $\binom{n}{k}$ heißt Binomialkoeffizient. Er gibt an, auf wie viele Arten man eine Teilmenge von *k* Elementen aus einer Menge mit *n* Elementen auswählen kann. Die Definition des Binomialkoeffizienten (mit n$\geq k$) lautet:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Beispiel: Die Anzahl der möglichen Ziehungen beim Lotto, wobei eine Teilmenge von 6 Kugeln aus einer Menge von 49 Kugeln (ohne Zurücklegen) gezogen wird, kann mit einem Binomialkoeffizient bestimmt werden:

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = 13.983.816$$

Pascalsche Dreieck

Niedrige Binomialkoeffizienten können sehr schnell mit Hilfe des Pascalschen Dreiecks bestimmt werden. Hierbei ergibt sich ein Binomialkoeffizient jeweils als Summe der beiden Koeffizienten, die direkt über ihm stehen:

$$\binom{0}{0} = \mathbf{1}$$

$$\binom{1}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$\binom{2}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{2}{1} = \mathbf{2} \qquad \binom{2}{2} = \mathbf{1}$$

$$\binom{3}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{3}{1} = \mathbf{3} \qquad \binom{3}{2} = \mathbf{3} \qquad \binom{3}{3} = \mathbf{1}$$

$$\binom{4}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{4}{1} = \mathbf{4} \qquad \binom{4}{2} = \mathbf{6} \qquad \binom{4}{3} = \mathbf{4} \qquad \binom{4}{4} = \mathbf{1}$$

$$\binom{5}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{5}{1} = \mathbf{5} \qquad \binom{5}{2} = \mathbf{10} \qquad \binom{5}{3} = \mathbf{10} \qquad \binom{5}{4} = \mathbf{5} \qquad \binom{5}{5} = \mathbf{1}$$

$$\binom{6}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{6}{1} = \mathbf{6} \qquad \binom{6}{2} = \mathbf{15} \qquad \binom{6}{3} = \mathbf{20} \qquad \binom{6}{4} = \mathbf{15} \qquad \binom{6}{5} = \mathbf{6} \qquad \binom{6}{6} = \mathbf{1}$$

$$\binom{7}{0} = \mathbf{1} \qquad \binom{7}{1} = \qquad \binom{7}{2} = \mathbf{21} \qquad \binom{7}{3} = \mathbf{35} \qquad \binom{7}{4} = \mathbf{35} \qquad \binom{7}{5} = \mathbf{21} \qquad \binom{7}{6} = \qquad \binom{7}{7} = \mathbf{1}$$

Das Pascalsche Dreieck ist symmetrisch: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Besondere Binomialkoeffizienten sind:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$$

2.2 Bernoulliformel und Binomialverteilung

Spezielle Zufallsexperimente mit genau **zwei möglichen Ergebnissen**, deren **Wahrscheinlichkeiten sich nicht ändern**, werden Bernoulliexperimente genannt.

Beispiele hierfür sind:

- Werfen einer Münze; mögliche Ergebnisse: Wappen / Zahl
- Ziehen von Kugeln aus einem Gefäß, in dem sich nur schwarze und weiße Kugeln befinden; mögliche Ergebnisse: schwarz / weiß
- Funktionsprüfung; mögliche Ergebnisse: in Ordnung / nicht in Ordnung

Die Wahrscheinlichkeit in einem Bernoulliexperiment genau *k* Erfolge zu erzielen, lässt sich aus der Erfolgswahrscheinlichkeit *p* und der Anzahl der durchgeführten Experimente *n* berechnen.

Bernoulliformel: $\mathrm{P}(\mathrm{X} = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Beispiel: In einem Fußballspiel steht es nach der Verlängerung immer noch unentschieden. Jetzt muss das Spiel im Elfmeterschießen entschieden werden. Die Wahrscheinlichkeit, dass genau 4 Tore bei 5 Elfmetern fallen, beträgt bei einer Trefferwahrscheinlichkeit von 80%:

$$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 4) = \binom{5}{4} \cdot 0{,}8^4 \cdot (1 - 0{,}8)^{5-4} = 5 \cdot 0{,}8^4 \cdot 0{,}2 = 0{,}41$$

Binomialverteilung

Die Wahrscheinlichkeiten P(X) für die Anzahl aller möglichen Tore, die im obigen Beispiel bei 5 Elfmetern fallen können, sind in der nachfolgenden Wertetabelle angegeben und in einem Diagramm dargestellt.

k	P(X)
0	0,00
1	0,01
2	0,05
3	0,20
4	0,41
5	0,33