IV. Matrizen

1 Rechenregeln

1.1 Addition bzw. Subtraktion

Matrizen können nur mit anderen Matrizen, die das gleiche Format besitzen, addiert bzw. subtrahiert werden. D.h. die Zeilen- und Spaltenanzahl der beiden muss gleich groß sein. Ist das nicht der Fall, sind die Matrizen nicht addierbar bzw. subtrahierbar.

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 3 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}$

1.2 Skalare Multiplikation

Multipliziert man ein Skalar mit einer Matrix, wird dies einfach elementweise vorgenommen.

Beispiel: $2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -2 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$

1.3 Multiplikation von Matrizen

Matrizen mit anderen Matrizen oder Vektoren zu multiplizieren ist deutlich aufwändiger. Zudem muss die Spaltenanzahl der linken Matrix der Zeilenanzahl der rechten Matrix entsprechen. Ansonsten können Matrizen nicht miteinander multipliziert werden.

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 & 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 1 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 1 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (-4) \cdot 0 & 0 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 & 0 \cdot (-3) + (-4) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

Hinweis: Matrizen dürfen **nicht durcheinander dividiert** werden!

1.4 Die inverse Matrix

Nur quadratische Matrizen (Zeilenanzahl = Spaltenanzahl) können inverse Matrizen besitzen.
Zwei zueinander inverse Matrizen (A und A^{-1}) ergeben im Produkt stets die Einheitsmatrix E. Es gilt also: $\mathrm{A} \cdot \mathrm{A}^{-1} = \mathrm{A}^{-1} \cdot \mathrm{A} = \mathrm{E}$

Beispiel: Weisen Sie nach, dass die Matrizen $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ invers zueinander sind.

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{E}.$$

Somit sind die Matrizen invers zueinander.

1.5 Matrizengleichungen

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} &\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} + \mathrm{B} = \mathrm{C} && | - \mathrm{B} \\ &\mathrm{A} \cdot \mathrm{X} = \mathrm{C} - \mathrm{B} && | \cdot \mathrm{A}^{-1} \textit{ von links} \\ &\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1} \cdot (\mathrm{C} - \mathrm{B}) && \end{aligned}$$

Beispiel 2:

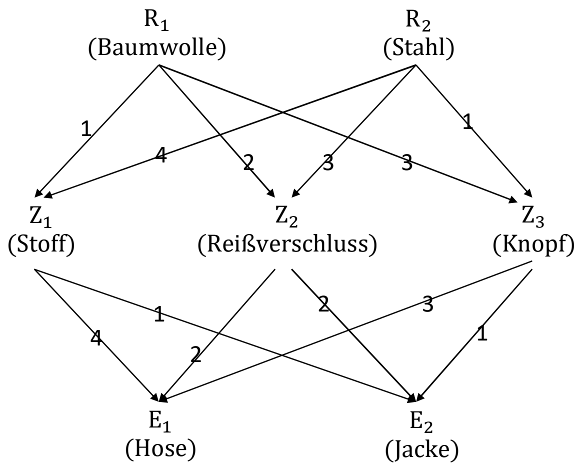
$$\begin{aligned} &\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} + \mathrm{X} = \mathrm{B} + 2\mathrm{X} && | - 2\mathrm{X} \\ &\mathrm{X} \cdot \mathrm{A} - \mathrm{X} = \mathrm{B} && \\ &\mathrm{X} \cdot (\mathrm{A} - \mathrm{E}) = \mathrm{B} && | \cdot (\mathrm{A} - \mathrm{E})^{-1} \textit{ von rechts} \\ &\mathrm{X} = \mathrm{B} \cdot (\mathrm{A} - \mathrm{E})^{-1} && \end{aligned}$$

2 Lineare Verflechtungen

2.1 Materialverflechtung

Beispiel: Ein Markenhersteller für Jeanshosen und Jeansjacken stellt diese in einem zweistufigen Produktionsprozess her. Zunächst werden aus zwei Rohstoffen (Baumwolle, Stahl) die drei Zwischenprodukte (Stoff, Reißverschluss, Knopf) hergestellt. Im zweiten Produktionsschritt werden daraus die beiden Endprodukte (Hose, Jacke) gefertigt.

Darstellung des Materialverbrauches im **Verflechtungsdiagramm**:



Bspw. benötigt man für einen Reißverschluss: 2 EH Baumwolle und 3 Einheiten Stahl. Für eine Hose benötigt man 4 EH Stoff, 2 EH Reißverschluss und 3 EH Knopf.

Der Materialverbrauch kann ebenso durch Verflechtungsmatrizen dargestellt werden.
(Tipp: Lesen Sie **spaltenweise**!)

$$A_{RZ} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B_{ZE} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Das Produkt der Matrizen A und B ergibt die Matrix C. Aus ihr kann (spaltenweise) entnommen werden, welche Mengen an Rohstoffen man für eine ME der Endprodukte benötigt.

$$\mathbf{C_{RE}} = \mathbf{A_{RZ}} \cdot \mathbf{B_{ZE}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 25 & 11 \end{pmatrix}$$ **(Formel siehe Merkhilfe)**

Bspw. benötigt man für eine Jacke 8 EH Baumwolle und 11 Einheiten Stahl.

2.2 Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Mithilfe der Gleichungen **(Formeln siehe Merkhilfe)**

$\vec{\boldsymbol{r}} = \mathbf{A} \cdot \vec{\boldsymbol{z}}$ $\vec{\boldsymbol{z}} = \mathbf{B} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}$ $\vec{\boldsymbol{r}} = \mathbf{C} \cdot \vec{\boldsymbol{p}}$

kann berechnet werden, welche Mengen an Zwischenprodukten $\vec{z}$ bzw. Rohstoffen $\vec{r}$ für die Produktion von $\vec{p}$ Endprodukten benötigt werden.

Beispiel: Ein Kunde bestellt 4 Jeanshosen und 6 Jeansjacken. Wie viele ME an Rohstoffen (Baumwolle, Stahl) und Zwischenprodukten (Stoff, Reißverschluss, Knopf) müssen hierfür beschafft bzw. hergestellt werden.

$\vec{p} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix};$

$\vec{z} = \mathrm{B} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 18 \end{pmatrix}$ $\vec{r} = \mathrm{A} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 22 \\ 20 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 116 \\ 166 \end{pmatrix}$

Es müssen also 116 ME an Baumwolle und 166 ME an Stahl beschafft werden. Daraus müssen dann zunächst 22 ME an Stoff, 20 ME an Reißverschlüssen und 18 ME an Knöpfen hergestellt werden.

2.3 Kosten

Beispiel: Dem Betrieb liegen Kosten (pro ME) für die Beschaffung der Rohstoffe $\overrightarrow{k_\mathrm{R}}$, für die Fertigung der Zwischenprodukte $\overrightarrow{k_\mathrm{Z}}$ und der Endprodukte $\overrightarrow{k_\mathrm{P}}$ vor:
$\overrightarrow{k_\mathrm{R}} = (2 \quad 3),;$ $\overrightarrow{k_\mathrm{Z}} = (4 \quad 1 \quad 2);$ $\overrightarrow{k_\mathrm{P}} = (3 \quad 1).$
Zusätzlich hat der Betrieb Fixkosten von $\mathrm{K}_{fix} = 100$ GE.
Welche Gesamtkosten fallen für die bestellten 4 Jeanshosen und 6 Jeansjacken an?

Zunächst werden die variablen Herstellkosten $\overrightarrow{k_v}$ pro ME der Endprodukte berechnet.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{k_v}} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_\mathrm{R}}} \cdot \mathbf{C} + \overrightarrow{\boldsymbol{k_\mathrm{Z}}} \cdot \mathbf{B} + \overrightarrow{\boldsymbol{k_\mathrm{P}}} = (2 \quad 3) \cdot \begin{pmatrix} 17 & 8 \\ 25 & 11 \end{pmatrix} + (4 \quad 1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + (3 \quad 1)$$

$= (136 \quad 58)$ **(Formel siehe Merkhilfe)**

Gesamtkosten: $\mathbf{K} = \overrightarrow{\boldsymbol{k_v}} \cdot \vec{\boldsymbol{p}} + \mathbf{K}_{fix} = (136 \quad 58) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} + 100 = 992 \text{ GE}$