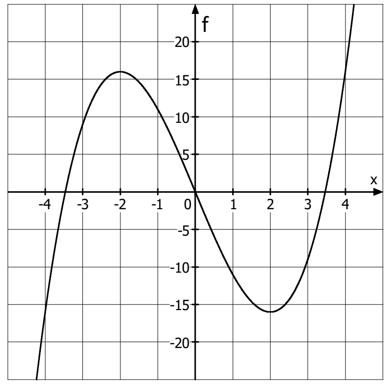
3.3 Monotonie und Krümmung

Eine Funktion, die mit zunehmendem x-Wert größer wird, heißt streng monoton steigend. Entsprechend heißt eine Funktion, die mit zunehmendem x-Wert kleiner wird, streng monoton fallend.
Die Monotonie einer Funktion lässt sich mit Hilfe ihrer ersten Ableitung bestimmen.

Zur Bestimmung der Krümmung (links- oder rechtsgekrümmt) untersucht man die zweite Ableitung.

Funktion $\boldsymbol{f(x)}$	**erste Ableitung** $\boldsymbol{f'(x)}$	**zweite Ableitung** $\boldsymbol{f''(x)}$
streng monoton steigend	$f'(x) > 0$	
streng monoton fallend	$f'(x) < 0$	
linksgekrümmt	streng monoton steigend	$f''(x) > 0$
rechtsgekrümmt	streng monoton fallend	$f''(x) < 0$

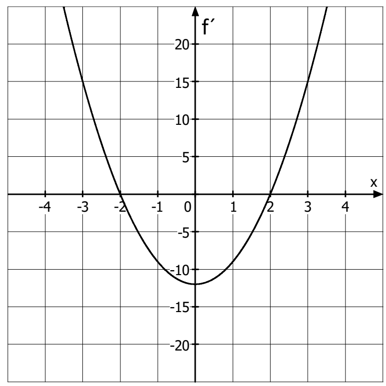
Beispiel: Untersuchen Sie Funktion bzw. Schaubild von $f(x) = x^3 - 12x$ auf Monotonie und Krümmung.



Zur Untersuchung der **Monotonie** wird die **erste Ableitung** gebildet.

Die Funktion ist streng monoton steigend für
$f'(x) = 3x^2 - 12 > 0$,
also für die Bereiche $x < -2$ und $x > 2$.

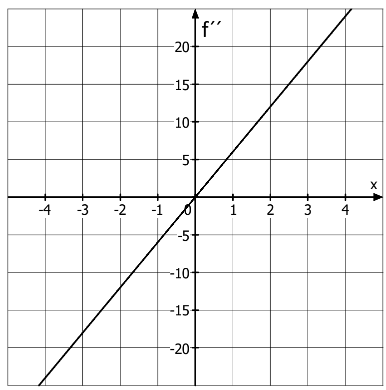
Die Funktion ist streng monoton fallend für
$f'(x) = 3x^2 - 12 < 0$,
also für den Bereich $-2 < x < 2$.



Zur Untersuchung der **Krümmung** wird die **zweite Ableitung** gebildet.

Das Schaubild ist linksgekrümmt für
$f''(x) = 6x > 0$, also für den Bereich $x > 0$.

Das Schaubild ist rechtsgekrümmt für
$f''(x) = 6x < 0$, also für den Bereich $x < 0$.

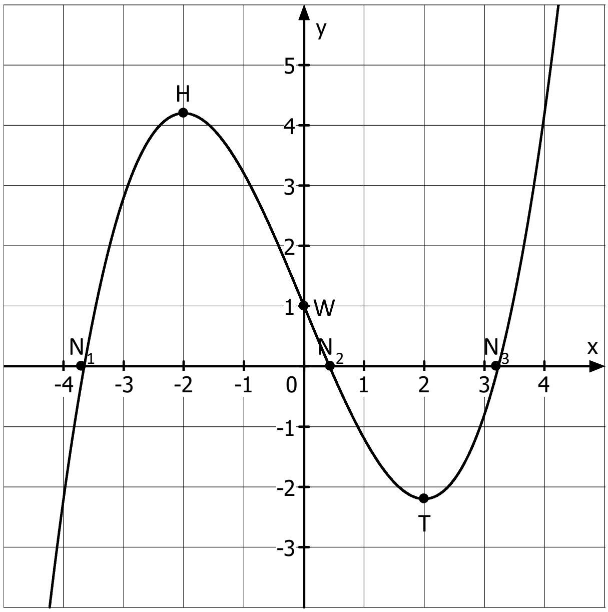


3.4 Nullstellen, Extrempunkte und Wendepunkte

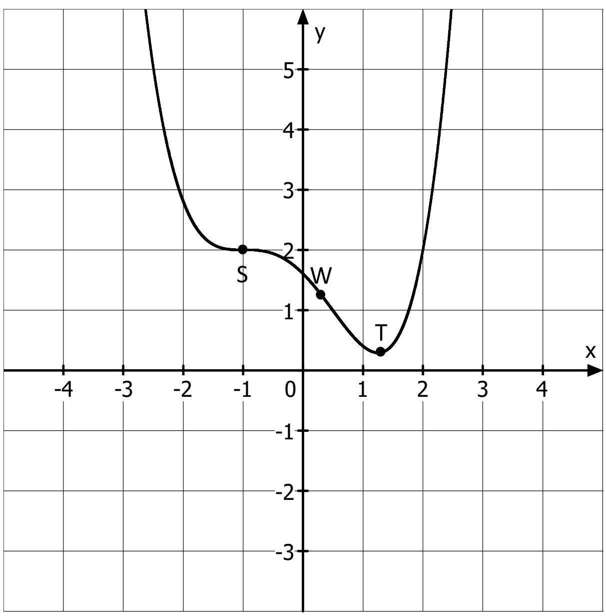
Bedingungen

Nullstelle:	$f(x) = 0$
Hochpunkt (H):	1. $f'(x) = 0$ 2. $f''(x) < 0$ (bzw. Nullstelle von f' mit VZW von $+$ nach $-$)
Tiefpunkt (T):	1. $f'(x) = 0$ 2. $f''(x) > 0$ (bzw. Nullstelle von f' mit VZW von $-$ nach $+$)
Wendepunkt (W):	1. $f''(x) = 0$ 2. $f'''(x) \neq 0$ (bzw. Nullstelle von f'' mit VZW)
Sattelpunkt (S):	1. $f''(x) = 0$ 2. $f'''(x) \neq 0$ (bzw. Nullstelle von f'' mit VZW) 3. $f'(x) = 0$

Beispiele



y
5
4
3
2
1
H
W
N1
N2
N3
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
-2
-3
T



y
5
4
3
2
1
S
W
T
x
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
-1
-2
-3