# 3 Differentialrechnung

## 3.1 Ableiten (Differenzieren)

Durch die **Ableitungsfunktion *f´*(*x*)** kann die **Steigung** des Schaubildes der Funktion *f*(*x*) an jedem beliebigen x-Wert ermittelt werden.

Zum Ableiten (Differenzieren) dienen die nachfolgenden Regeln.

**Ableiten der Grundfunktionen**

| | |
|---|---|
| $f(x) = x^n$ | $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ |
| $f(x) = x$ | $f'(x) = 1$ |
| $f(x) = e^x$ | $f'(x) = e^x$ |
| $f(x) = e^{ax}$ | $f'(x) = a \cdot e^{ax}$ |
| $f(x) = \sin(x)$ | $f'(x) = \cos(x)$ |
| $f(x) = \cos(x)$ | $f'(x) = -\sin(x)$ |

**Weitere Ableitungsregeln**

Summenregel: $(u \pm v)' = u' \pm v'$
Beispiel: $f(x) = x^2 + e^x; f'(x) = 2x + e^x$

Faktorregel: $(c \cdot u)' = c \cdot u' \quad (c \in R)$
Beispiel: $f(x) = 3 \cdot \sin(x);\ f'(x) = 3 \cdot \cos(x)$

Regel für konstante Summanden: $(u + c)' = u' \quad (c \in R)$
Beispiel: $f(x) = \sin(x) + 3;\ f'(x) = \cos(x)$

Produktregel: $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
Beispiel: $f(x) = x^4 \cdot \sin(x);\ f'(x) = 4x^3 \cdot \sin(x) + x^4 \cdot \cos(x)$

Kettenregel: $\big(u(v)\big)' = u'(v) \cdot v'$
Beispiel: $f(x) = \sin(x^3);\ f'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2$

**Aufgabe (aus Abiturprüfung 2017/2018)**

Berechnen Sie die erste Ableitung $g'$ für die jeweilige Funktion $g$.

(1) $g(x) = (2x + 1)^2$

(2) $g(x) = (x + 1) \cdot e^x$

Durch Anwendung der Ableitungsregeln erhält man:

(1) $g'(x) = 2 \cdot (2x + 1) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + 1)$ (Kettenregel)

(2) $g'(x) = 1 \cdot e^x + (x + 1) \cdot e^x$ (Produktregel)

### 3.2 Tangente und Normale

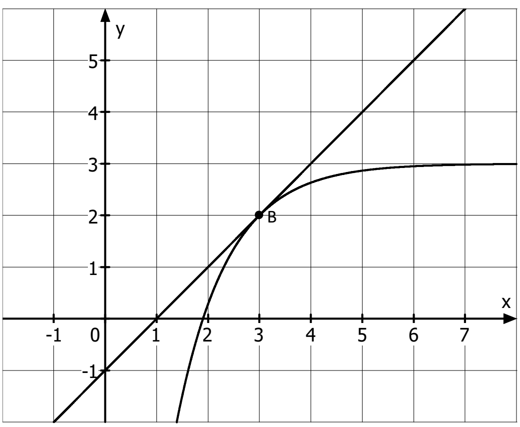
Als **Tangente** bezeichnet man eine Gerade, die das Schaubild von $f(x)$ im Punkt B($u|f(u)$) **berührt**.
Die Steigung der Tangente in diesem Berührpunkt entspricht der Ableitung der Funktion $f'(u)$.

Die Funktionsgleichung der Tangente lautet: $y_t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

**Beispiel:** Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an das Schaubild von $f(x) = -e^{-x+3} + 3$ im Punkt B(3|2).

$f'(x) = -e^{-x+3} \cdot (-1) = e^{-x+3}$
$f'(3) = e^{-3+3} = 1$

Tangente:
$y_t(x) = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$
$y_t(x) = 1 \cdot (x - 3) + 2$
$y_t(x) = x - 1$



Als **Normale** bezeichnet man eine Gerade, die das Schaubild $f(x)$ im Punkt B($u$|$f$($u$)) **senkrecht (orthogonal) schneidet**.
Die Steigung der Normalen in diesem Schnittpunkt entspricht dem negativen Kehrwert der Tangentensteigung.

Die Funktionsgleichung der Normalen lautet: $y_n(x) = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x-u) + f(u)$

**Beispiel:** Berechnen Sie die Gleichung der Normalen an das Schaubild von
$f(x) = -e^{-x+3} + 3$ im Punkt B(3|2).

$f'(x) = -e^{-x+3} \cdot (-1) = e^{-x+3}$
$f'(3) = e^{-3+3} = 1$

Normale:

$$y_n(x) = -\frac{1}{f'(3)} \cdot (x-3) + f(3)$$
$$y_n(x) = -\frac{1}{1} \cdot (x-3) + 2$$
$$y_n(x) = -x + 5$$