

Abitur 2019 Teil 3 mit Hilfsmitteln – Stochastik Aufgabe 1

(Wahlaufgabe 1 von 2)

1 In Baden-Württemberg tragen 3,5% aller Zecken FSME-Viren in sich.

Diese Viren werden durch Bisse der Zecken auf den Menschen übertragen.

1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse: 6

E_1 : Von 20 zufällig ausgewählten Zecken trägt keine einzige FSME-Viren in sich.

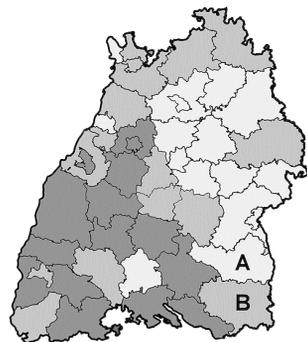
E_2 : Von 50 zufällig ausgewählten Zecken trägt höchstens eine FSME-Viren in sich.

E_3 : Von 100 zufällig ausgewählten Zecken tragen mindestens vier FSME-Viren in sich.

1.2 Prüfen Sie, ob folgende Aussage wahr ist: Das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen übersteigt in Baden-Württemberg erst dann 60%, wenn man dort von mindestens 25 Zecken gebissen wird. 3

1.3 Die angegebene Wahrscheinlichkeit von 3,5%, mit der die Zecke FSME-Viren in sich trägt, stellt einen Durchschnittswert für ganz Baden-Württemberg dar. In allen Regionen wurden Stichproben genommen und die dortigen relativen Häufigkeiten berechnet. Je dunkler die Region in der Karte dargestellt ist, desto höher sind die relativen Häufigkeiten dafür, dass die Zecken FSME-Viren in sich tragen.

Für die Regionen A und B wurde jeweils ein 95%-Vertrauensintervall für die unbekanntes Wahrscheinlichkeiten, mit der eine Zecke dort FSME-Viren in sich trägt, bestimmt. Für die Stichprobe in der Region A ist bekannt, dass 2000 Zecken getestet wurden.



1.3.1 Bei der Stichprobe in der Region A stellte man fest, dass 58 Zecken FSME-Viren in sich tragen. Geben Sie das näherungsweise bestimmte 95%-Vertrauensintervall für die unbekanntes Wahrscheinlichkeit an. 3

Interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.

1.3.2 Bei der Prüfung der Stichproben wird festgestellt, dass die Längen der Vertrauensintervalle für die beiden Regionen A und B übereinstimmen, in Region B jedoch eine größere relative Häufigkeit als in Region A vorliegt (siehe Karte). 3

Erläutern Sie, was dies für den Umfang der Stichprobe in Region B bedeutet.

Teil 3 Aufgabe 1

- 1.1 Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 erhalten Sie mit Hilfe der Binomialverteilung. Legen Sie Y als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung. Legen Sie Z als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses.
- 1.2 Um die Aussage zu prüfen, ob das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen erst dann 60% übersteigt, wenn man von mindestens 25 Zecken gebissen wird, berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass bei genau 25 Zeckenbissen eine Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen stattfindet. Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E : «Von 25 zufällig ausgewählten Zecken trägt mindestens eine FSME-Viren in sich.» erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der Aussage.
- 1.3.1 Bestimmen Sie die relative Häufigkeit h für die FSME-Viren, indem Sie die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren durch die gesamte Anzahl der Zecken teilen. Das 95%-Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke FSME-Viren in sich trägt, erhalten Sie mit der Formel: $I = \left[h - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}; h + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$.
- 1.3.2 Berechnen Sie die Länge L des Vertrauensintervalls, indem Sie die linke Grenze von der rechten Grenze subtrahieren. Überlegen Sie für kleine relative Häufigkeiten (also für Werte von $h < 0,5$), wie sich der Term $h \cdot (1-h)$ verändert, wenn h größer wird, und beachten Sie, dass der Term $\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$ gleich bleiben soll.

Teil 3 Aufgabe 1

- 1.1 Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 20$ und $p = 0,035$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 : «Von 20 zufällig ausgewählten Zecken trägt keine einzige FSME-Viren in sich.» erhält man mit Hilfe der Binomialverteilung:

$$P(E_1) = P(X = 0) \approx 0,4904$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_1 etwa 49,0%.

Legt man Y als Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren fest, so ist Y binomialverteilt mit den Parametern $n = 50$ und $p = 0,035$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 : «Von 50 zufällig ausgewählten Zecken trägt höchstens eine FSME-Viren in sich.» erhält man mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung:

$$P(E_2) = P(Y \leq 1) \approx 0,4738$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_2 etwa 47,4%.

Legt man Z als Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren fest, so ist Z binomialverteilt mit den Parametern $n = 100$ und $p = 0,035$.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 : «Von 100 zufällig ausgewählten Zecken tragen mindestens vier FSME-Viren in sich.» erhält man mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P(E_3) = P(Z \geq 4) = 1 - P(Z \leq 3) \approx 1 - 0,5347 = 0,4653$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E_3 etwa 46,5%.

- 1.2 Um die Aussage zu prüfen, ob das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen erst dann 60% übersteigt, wenn man von mindestens 25 Zecken gebissen wird, berechnet man die Wahrscheinlichkeit, dass bei genau 25 Zeckenbissen eine Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen stattfindet. Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Zecken mit FSME-Viren fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 25$ und $p = 0,035$. Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E : «Von 25 zufällig ausgewählten Zecken trägt mindestens eine FSME-Viren in sich.» erhält man mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung und der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses:

$$P(E) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,4104 = 0,5896 \approx 59\%$$

Da das Risiko einer Übertragung der FSME-Viren auf den Menschen bei genau 25 Zeckenbissen kleiner als 60% ist, ist die Aussage nicht wahr.



frv.tv/de



frv.tv/df



frv.tv/df



frv.tv/df

1.3.1 Da bei insgesamt $n = 2000$ Zecken bei der Stichprobe in der Region A 58 Zecken FSME-Viren in sich tragen, beträgt die relative Häufigkeit h für die FSME-Viren:

$$h = \frac{58}{2000} = 0,029$$

Das 95%-Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke FSME-Viren in sich trägt, erhält man mit der Formel:

$$I = \left[h - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} ; h + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right]$$

Damit ergibt sich:

$$I = \left[0,029 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,029 \cdot (1-0,029)}{2000}} ; 0,029 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,029 \cdot (1-0,029)}{2000}} \right]$$

$$I \approx [0,022 ; 0,036]$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Zecke in Region A FSME-Viren in sich trägt, liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% zwischen 2,2% und 3,6%.

1.3.2 Für die Länge L des Vertrauensintervalls gilt:

$$L = h + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} - \left(h - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}} \right) = 3,92 \cdot \sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$$

Da die Vertrauensintervalle für die beiden Regionen A und B übereinstimmen, bei Region B aber eine größere relative Häufigkeit h vorliegt als in Region A, so bedeutet dies für den Umfang n der Stichprobe in Region B Folgendes:

Wenn sich h vergrößert, wird auch der Term $h \cdot (1-h)$ für kleine relative Häufigkeiten (also $h < 0,5$) größer, so dass auch n größer werden muss, wenn der Term $\sqrt{\frac{h \cdot (1-h)}{n}}$ gleich bleiben soll.

Somit wurden in der Region B mehr als 2000 Zecken untersucht.