Abitur 2019 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 4 Anwendungsorientierte Analysis
(Wahlaufgabe 3 von 3)

4 Ein Unternehmen bietet seinen Kunden für eine kurze Testphase ein neues Produkt an. Für den nächsten Produktionszeitraum sind maximal 9 Mengeneinheiten (ME) des Produkts geplant.
Der Verkaufspreis je Mengeneinheit wird mit 10 Geldeinheiten (GE) kalkuliert.
Der erzielte Erlös ist das Produkt aus dem Verkaufspreis und der Menge.
Die Gesamtkosten können durch die Funktion K mit der Funktionsgleichung

$$\mathrm{K}(x) = 0,2x^3 - x^2 + 4x + 8$$

beschrieben werden, mit x in ME, K in GE.
Der Gewinn wird berechnet als Differenz aus dem Erlös und den Gesamtkosten.

4.1 Zeichnen Sie das Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem. Markieren Sie darin die Gewinnzone, d.h. die Produktionsmengen, für die kein Verlust gemacht wird. 4

4.2 Berechnen Sie den maximalen Gewinn. 4

4.3 Claus stellt fest, dass an der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ folgende Bedingungen erfüllt sind: 2

(1) $\mathrm{K}''(\mathrm{x}_1) = 0 \quad \wedge \quad \mathrm{K}'''(\mathrm{x}_1) > 0$
(2) $\mathrm{K}'(x_1) = \frac{7}{3}$.

Interpretieren Sie diese Bedingungen im Sachzusammenhang.

10

Teil 2 Aufgabe 4

4.1 Um das Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion in ein Koordinatensystem zu zeichnen, erstellen Sie mit Hilfe des WTR eine Wertetabelle für die Gesamtkostenfunktion $\mathrm{K}(x)$. Stellen Sie eine Gleichung für die Erlösfunktion $\mathrm{E}(x)$ auf. Beachten Sie, dass die Gewinnzone derjenige Bereich ist, in welchem die Erlösfunktion oberhalb der Gesamtkostenfunktion verläuft.

4.2 Den maximalen Gewinn erhalten Sie, indem Sie zuerst die Gewinnfunktion G mit $\mathrm{G}(x) = \mathrm{E}(x) - \mathrm{K}(x)$ aufstellen und mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung von G das Maximum von G bestimmen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $\mathrm{G}'(x) = 0$ nach x auf. Verwenden Sie die *abc*-Formel. Beachten Sie, dass $0 \leqslant x \leqslant 9$ ist. Setzen Sie den erhaltenen x-Wert in $\mathrm{G}''(x)$ ein. Falls das Ergebnis kleiner als Null ist, handelt es sich um ein Maximum. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den x-Wert in $\mathrm{G}(x)$ einsetzen. Überprüfen Sie mit Hilfe der Wertetabelle die Randwerte bei $x = 0$ und $x = 9$.

4.3 Überlegen Sie, welche Bedeutung die Bedingungen für das Schaubild von K haben und übertragen Sie diese auf den Sachzusammenhang.

Teil 2 Aufgabe 4

4.1 Um das Schaubild der Erlös- und Gesamtkostenfunktion in ein Koordinatensystem zu zeichnen, erstellt man mit Hilfe des WTR eine Wertetabelle für die Gesamtkostenfunktion $\mathrm{K}(x) = 0,2x^3 - x^2 + 4x + 8$:

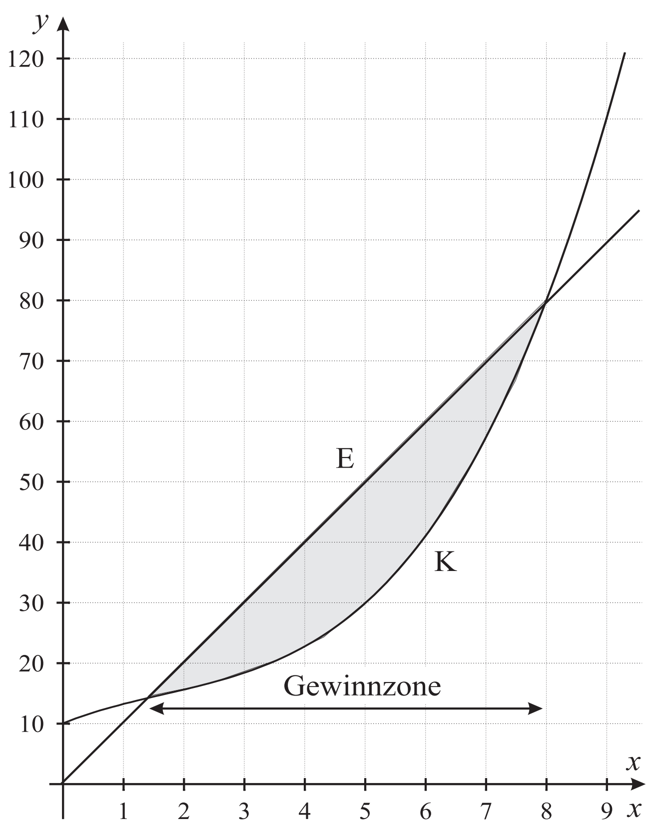
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathrm{K}(x)$	8	11,2	13,6	16,4	20,8	28	39,2	55,6	78,4	108,8

Für die Erlösfunktion (Produkt aus Verkaufspreis und der Menge x) gilt:

$$\mathrm{E}(x) = 10 \cdot x$$

Das Schaubild dieser Funktion ist eine Gerade durch den Ursprung $\mathrm{O}(0 \mid 0)$ mit Steigung $m = 10$.

Die Gewinnzone ist derjenige Bereich, in welchem die Erlösfunktion oberhalb der Gesamtkostenfunktion verläuft.



4.2 Den maximalen Gewinn erhält man, indem man zuerst die Gewinnfunktion G mit

$$\mathrm{G}(x) = \mathrm{E}(x) - \mathrm{K}(x)$$

aufstellt und mit Hilfe der 1. und 2. Ableitung von G das Maximum von G bestimmt:

$$\begin{aligned} \mathrm{G}(x) &= 10x - \left(0,2x^3 - x^2 + 4x + 8\right) = -0,2x^3 + x^2 + 6x - 8 \\ \mathrm{G}'(x) &= -0,6x^2 + 2x + 6 \\ \mathrm{G}''(x) &= -1,2x + 2 \end{aligned}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $\mathrm{G}'(x) = 0$ nach x auf:

$$-0,6x^2 + 2x + 6 = 0$$

Mit Hilfe der *abc*-Formel erhält man die Lösungen $x_1 \approx 5,24$ und $x_2 \approx -1,91$. Wegen $0 \leqslant x \leqslant 9$ kommt nur $x \approx 5,24$ als Lösung in Frage. Setzt man den erhaltenen x-Wert in $\mathrm{G}''(x)$ ein, erhält man:

$$\mathrm{G}''(5,24) = -1,2 \cdot 5,24 + 2 = -4,288 < 0 \Rightarrow \text{ Maximum}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man den x-Wert in $\mathrm{G}(x)$ einsetzt:

$$\mathrm{G}(5,24) = -0,2 \cdot 5,24^3 + 5,24^2 + 6 \cdot 5,24 - 8 \approx 22,12$$

Die Überprüfung der Randwerte ergibt:

$$\mathrm{G}(0) = -8 < 0$$

und

$$\mathrm{G}(9) = -0,2 \cdot 9^3 + 9^2 + 6 \cdot 9 - 8 = -18,8 < 0$$

Somit beträgt der maximale Gewinn etwa $22,12\,\mathrm{GE}$.

4.3 Die Bedingung

$$(1)\ \mathrm{K}''(\mathrm{x}_1) = 0 \wedge \mathrm{K}'''(\mathrm{x}_1) > 0$$

bedeutet, dass an der Stelle $x_1 = \frac{5}{3}$ beim Schaubild von K ein Wendepunkt mit minimaler Steigung vorliegt. Im Sachzusammenhang bedeutet dies, dass der Zuwachs der Gesamtkosten bei $\frac{5}{3}$ Mengeneinheiten minimal ist.
Die Bedingung

$$(2)\ \mathrm{K}'(x_1) = \frac{7}{3}$$

bedeutet, dass der minimale Zuwachs der Gesamtkosten bei $\frac{5}{3}$ Mengeneinheiten genau $\frac{7}{3}$ Geldeinheiten pro Mengeneinheit beträgt.