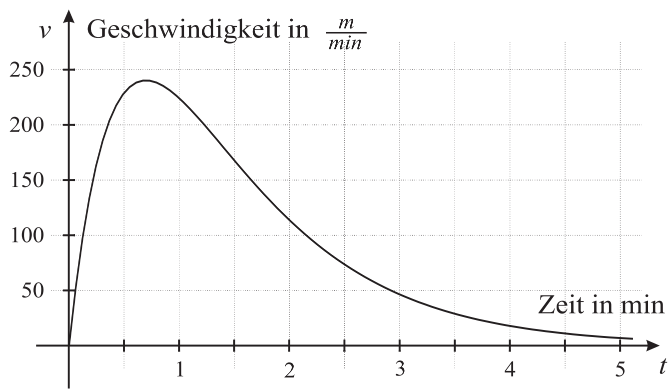
Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 2
(Wahlaufgabe 1 von 3)

2. Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Motorbootes ist für $t > 0$ stets positiv und wird durch

$$v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t} \,;\, t \geqslant 0$$

beschrieben (Zeit t in min, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$). Die Abbildung zeigt den Graphen von v:



2.1 Prüfen Sie, ob die Geschwindigkeit des Motorbootes nach einer Minute größer als 15 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ ist.

2.2 Berechnen Sie, wie weit das Motorboot nach zwei Minuten gefahren ist.

2.3 Ab dem Zeitpunkt $t_0 = 2{,}55$ wird die Geschwindigkeit des Motorbootes durch die Tangente an das Schaubild der Funktion v an der Stelle t_0 beschrieben.
Wann kommt das Motorboot zum Stillstand?

Teil 2 Aufgabe 2

2.1 Setzen Sie $t = 1$ in $v(t)$ ein. Beachten Sie, dass das Ergebnis die Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}}$ hat und rechnen Sie das erhaltene Ergebnis in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ um.

2.2 Die Strecke s, die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals: $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\mathrm{d}t$.

2.3 Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente benötigen Sie den Funktionswert zum Zeitpunkt t_0 , also $v(t_0)$, sowie die zugehörige Steigung m, welche Sie mit Hilfe der 1. Ableitung von v bestimmen.
Setzen Sie diese in die allgemeine Tangentengleichung $y = v'(t_0) \cdot (t - t_0) + v(t_0)$ ein.
Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die neue Geschwindigkeit, die durch die Tangentengleichung beschrieben wird, Null ist. Setzen Sie also $y = 0$ und lösen Sie die Gleichung nach t auf.

Teil 2 Aufgabe 2

Es ist $v(t) = 960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}$; $t \geqslant 0$ (Zeit t in min, Geschwindigkeit $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{min}}$).

2.1 Die Geschwindigkeit des Motorbootes nach einer Minute erhält man, indem man $t = 1$ in $v(t)$ einsetzt:

$$v(1) = 960 \cdot e^{-1} - 960 \cdot e^{-2\cdot 1} \approx 223$$

Die Geschwindigkeit des Motorboots nach einer Minute beträgt etwa 223 $\frac{\text{m}}{\text{min}}$.
Um die Geschwindigkeit in $\frac{\text{km}}{\text{h}}$ anzugeben, erweitert man den Bruch mit 60:

$$v(1) = 223\,\frac{\text{m}}{\text{min}} = 223 \cdot \frac{60\,\text{m}}{60\,\text{min}} = \frac{13\,380\,\text{m}}{\text{h}} = 13{,}38\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Somit ist die Geschwindigkeit des Motorboots nach einer Minute kleiner als 15 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2.2 Die Strecke s, die das Motorboot in den ersten zwei Minuten zurücklegt, erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^2 v(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^2 \left(960 \cdot e^{-t} - 960 \cdot e^{-2t}\right) \mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{960}{-1} \cdot e^{-t} - \frac{960}{-2} \cdot e^{-2t}\right]_0^2 \\ &= \left(-960 \cdot e^{-2} + 480 \cdot e^{-2\cdot 2}\right) - \left(-960 \cdot e^{-0} + 480 \cdot e^{-2\cdot 0}\right) \\ &\approx 358{,}9 \end{aligned}$$

Das Motorboot ist in den ersten zwei Minuten etwa 359 m weit gefahren.

2.3 Zur Bestimmung der Gleichung der Tangente benötigt man den Funktionswert zum Zeitpunkt $t_0 = 2{,}55$, also $v(2{,}55) \approx 69{,}11$, sowie die zugehörige Steigung, die man mit der 1. Ableitung von v ermitteln kann. Mit der Kettenregel ergibt sich:

$$v'(t) = 960 \cdot e^{-t} \cdot (-1) - 960 \cdot e^{-2t} \cdot (-2) = -960 \cdot e^{-t} + 1920 \cdot e^{-2t}$$

Setzt man $t_0 = 2{,}55$ in $v'(t)$ ein, erhält man:

$$m = v'(2{,}55) = -960 \cdot e^{-2{,}55} + 1920 \cdot e^{-2\cdot 2{,}55} \approx -63{,}25$$

Setzt man die berechneten Werte in die allgemeine Tangentengleichung ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} y &= v'(t_0) \cdot (t - t_0) + v(t_0) \\ y &= -63{,}25 \cdot (t - 2{,}55) + 69{,}11 \\ y &= -63{,}25t + 230{,}40 \end{aligned}$$

Das Motorboot kommt zum Stillstand, wenn die neue Geschwindigkeit, die durch die Tangentengleichung beschrieben wird, Null ist:

$$\begin{aligned} y &= 0 \\ -63{,}25t + 230{,}40 &= 0 \\ t &\approx 3{,}64 \end{aligned}$$

Nach etwa $3{,}6$ Minuten kommt das Motorboot zum Stillstand.