Abitur 2018 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 4 Anwendungsorientierte Analysis
(Wahlaufgabe 3 von 3)

4 Ein Wetterballon startet auf Meereshöhe und sendet mit ansteigender Höhe Daten des entsprechenden Luftdrucks. Bei seinem Flug wird der vom Ballon gemessene Luftdruck p in hPa (Hektopascal) in Abhängigkeit von der Höhe h (in km) näherungsweise durch die Funktion p mit

$$p(h) = 1013 \cdot e^{-0{,}126 \cdot h}\ ;\ 0 \leqslant h \leqslant 11$$

modelliert.

4.1 Bestimmen Sie den Luftdruck auf Meereshöhe. 3
Ermitteln Sie die Höhe, bei der ein Luftdruck von 787 hPa gemessen wird.

4.2 Bestimmen Sie die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt. 2

4.3 Berechnen Sie den mittleren Wert des Luftdrucks, dem der Ballon bei seinem Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe ausgesetzt ist. 3

4.4 Interpretieren Sie die folgende Näherungsformel im Sachzusammenhang: 2

$$p(h+5{,}5) \approx \frac{p(h)}{2}\ ;\ 0 \leqslant h \leqslant 5{,}5$$

10

Teil 2 Aufgabe 4

4.1 Den Luftdruck auf Meereshöhe erhalten Sie, indem Sie $h = 0$ in $p(h)$ einsetzen.
Die Höhe, bei der ein Luftdruck von 787 hPa gemessen wird, erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $p(h) = 787$ durch Logarithmieren nach h auflösen.

4.2 Die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt, erhalten Sie, indem Sie $p(h+1)$ durch $p(h)$ teilen und von 100 % subtrahieren.

4.3 Den mittleren Wert des Luftdrucks $\overline{p}$, dem der Ballon bei seinem Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe ausgesetzt ist, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals:
$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

4.4 Beachten Sie, dass $p(h+5,5)$ den Luftdruck 5,5 km oberhalb von h beschreibt.

Teil 2 Aufgabe 4

Es ist $p(h) = 1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h}$; $0 \leqslant h \leqslant 11$ (h in km und $p(h)$ in hPa).

4.1 Den Luftdruck auf Meereshöhe erhält man, indem man $h = 0$ in $p(h)$ einsetzt:

$$p(0) = 1013 \cdot e^{-0,126 \cdot 0} = 1013$$

Der Luftdruck auf Meereshöhe beträgt 1013 hPa.
Die Höhe, bei der ein Luftdruck von 787 hPa gemessen wird, erhält man, indem man die Gleichung $p(h) = 787$ durch Logarithmieren nach h auflöst:

$$\begin{aligned} 1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h} &= 787 \\ e^{-0,126 \cdot h} &= \frac{787}{1013} \\ -0,126 \cdot h &= \ln\left(\frac{787}{1013}\right) \\ h &= \frac{\ln\left(\frac{787}{1013}\right)}{-0,126} \\ h &\approx 2,00 \end{aligned}$$

In einer Höhe von etwa 2 km beträgt der Luftdruck 787 hPa.

4.2 Die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt, erhält man, indem man $p(h+1)$ durch $p(h)$ teilt und von 100 % subtrahiert:

$$\begin{aligned} \frac{p(h+1)}{p(h)} &= \frac{1013 \cdot e^{-0,126 \cdot (h+1)}}{1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h}} \\ &= \frac{1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h} \cdot e^{-0,126 \cdot 1}}{1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h}} \\ &= e^{-0,126} \\ &\approx 0,882 \\ &= 88,2\% \end{aligned}$$

Wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt, beträgt der Luftdruck noch 88,2 % des vorherigen Werts. Für die Abnahme gilt damit:

$$100\% - 88,2\% = 11,8\%$$

Somit beträgt die prozentuale Abnahme des Luftdrucks, wenn die Höhe um einen Kilometer zunimmt, etwa 11,8 %.

4.3 Den mittleren Wert des Luftdrucks $\overline{p}$, dem der Ballon bei seinem Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe ausgesetzt ist, erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$\begin{aligned}
\overline{p} &= \frac{1}{11-0} \cdot \int_0^{11} p(h)\mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{11} \cdot \int_0^{11} \left(1013 \cdot e^{-0,126 \cdot h}\right) \mathrm{d}h \\
&= \frac{1}{11} \cdot \left[\frac{1013}{-0,126} \cdot e^{-0,126 \cdot h}\right]_0^{11} \\
&= \frac{1}{11} \cdot \left(\frac{1013}{-0,126} \cdot e^{-0,126 \cdot 11} - \frac{1013}{-0,126} \cdot e^{-0,126 \cdot 0}\right) \\
&\approx 548,11
\end{aligned}$$

Der mittlere Luftdruck beträgt beim Aufstieg von Meereshöhe bis auf 11 km Höhe etwa 548 hPa.

4.4 Der Term $p(h+5,5)$ beschreibt den Luftdruck $5,5\,\mathrm{km}$ oberhalb von h. Damit gibt die Näherungsformel $p(h+5,5) \approx \frac{p(h)}{2}$; $0 \leqslant h \leqslant 5,5$ an, dass sich der Luftdruck bei einem Aufstieg des Ballons um $5,5\,\mathrm{km}$ unabhängig von der Höhe h für $0 \leqslant h \leqslant 5,5$ etwa halbiert.