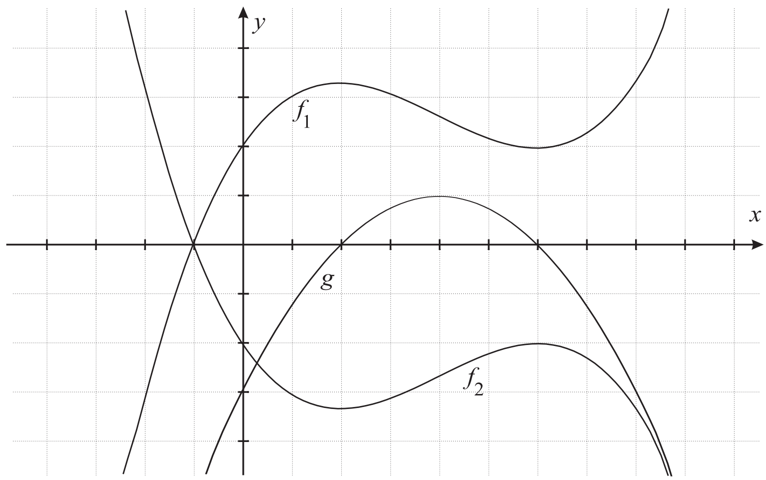
**Teil 2 mit Hilfsmitteln**

**Aufgabe 1**

1.1 Gegeben ist die Funktion $g$ durch $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$. In der Abbildung sind die Graphen der Funktionen $g$, $f_1$ und $f_2$ dargestellt:




1.1.1 Entscheiden Sie, welche der beiden Funktionen $f_1$ oder $f_2$ eine Stammfunktion von $g$ ist.
Geben Sie dafür zwei (verschiedene) Gründe an.

1.1.2 Beschriften Sie in der gegebenen Abbildung die Achsen mit einer geeigneten Skala.

1.1.3 Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt A der Fläche, die der Graph von $g$ mit der $x$-Achse einschließt, $\frac{8}{3}$ FE beträgt.

1.2 Gegeben sind die Funktionen $f$ und $h$ mit $f(x) = \cos(x)$ und $h(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

1.2.1 Beschreiben Sie, wie man den Graphen von $h$ aus dem Graphen von $f$ erhält und zeichnen Sie den Graphen von $h$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$.

1.2.2 Bestimmen Sie die Nullstellen von $h$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$.

## Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Beachten Sie, dass der Graph von $g$ eine Parabel ist. Überlegen Sie, welche Steigung eine Stammfunktion von $g$ an bestimmten Punkten hat und welcher Art der Extrempunkt des Graphen der Stammfunktion ist (Hoch- oder Tiefpunkt), wenn $g$ einen Vorzeichenwechsel an einer Nullstelle hat.

1.1.2 Zur Beschriftung der Achsen berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunkts mit Hilfe der 1. Ableitung. Alternativ können Sie auch eine Wertetabelle aufstellen.

1.1.3 Den Flächeninhalt A der Fläche zwischen dem Graphen von $g$ und der positiven $x$-Achse erhalten Sie durch Integration über eine Stammfunktion von $g$; die Integrationsgrenzen sind dabei die Nullstellen von $g$.

1.2.1 Eine allgemeine Kosinusfunktion hat die Form $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x - c)) + d$.
Dabei gibt $a$ die Streckung in $y$-Richtung, $b$ die Streckung/Stauchung in $x$-Richtung, $c$ die Verschiebung in $x$-Richtung und $d$ die Verschiebung in $y$-Richtung an. Die Periode $p$ ergibt sich durch $p = \frac{2\pi}{b}$. Überlegen Sie, was beim vorliegenden Fall zutrifft. Fertigen Sie damit eine Zeichnung an.

1.2.2 Die Nullstellen von $h$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$ erhalten Sie durch Lösen der Gleichung $h(x) = 0$. Substituieren Sie $\frac{\pi}{2}x = z$ und lösen Sie die entstandene Gleichung nach $z$ auf. Durch Resubstitution erhalten Sie die gesuchten $x$-Werte.
Alternativ können Sie die Nullstellen auch an der Zeichnung (falls vorhanden) ablesen und rechnerisch nachweisen.

## Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Es ist $g(x) = -2x^2 + 8x - 6$. Dies ist die Gleichung einer Parabel und $f_2$ ist eine Stammfunktion von $g$. Dies kann folgendermaßen begründet werden:

- Da $g(0) < 0$, muss eine Stammfunktion von $g$ für $x = 0$ eine negative Steigung besitzen.
- Da $g$ bei der kleineren der beiden Nullstellen einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat, muss eine Stammfunktion von $g$ an dieser Stelle ein Minimum haben. Entsprechend liegt bei der anderen Nullstelle von $g$ ein VZW von $+$ nach $-$ vor; eine Stammfunktion muss dort ein Maximum haben.
- Da der Graph von $g$ einen Hochpunkt mit positivem $y$-Wert hat, muss der Graph der Stammfunktion von $g$ an der entsprechenden Stelle einen Wendepunkt mit positiver Steigung haben.
- Da der Graph von $g$ eine nach unten geöffnete Parabel ist und somit der Koeffizient $a$ von $ax^2$ negativ ist, muss bei einer Stammfunktion von $g$ der Koeffizient $b$ von $bx^3$ ebenfalls negativ sein, so dass der Graph der Stammfunktion für große positive $x$-Werte eine negative Steigung hat und die Funktionswerte gegen $-\infty$ gehen.

1.1.2 Um die Achsen geeignet zu beschriften, wird der Extrempunkt des Graphen von $g$ bestimmt. Diesen erhält man mit Hilfe der 1. Ableitung von $g$:

$$g'(x) = -2 \cdot 2x + 8 = -4x + 8$$

Die notwendige Bedingung $g'(x) = 0$ führt zu $-4x + 8 = 0$ mit der Lösung $x = 2$.
Setzt man $x = 2$ in $g(x)$ ein, so erhält man den $y$-Wert:

$$g(2) = -2 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 - 6 = 2.$$

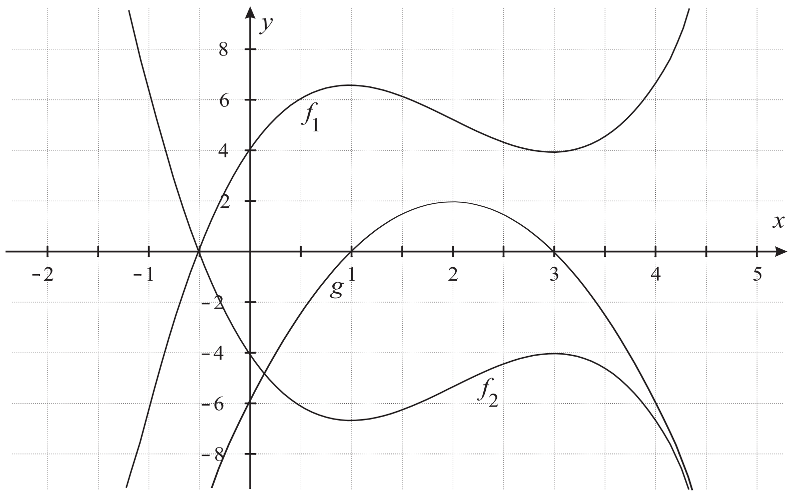
Somit hat der Extrempunkt, der Scheitel der Parabel, die Koordinaten $S(2 \mid 2)$.

Alternativ kann man in diesem Fall auch eine Wertetabelle aufstellen:

frv.tv/da

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-6$ | 0 | 2 | 0 | $-6$ |

Nun können die Achsen beschriftet werden.
Für die $x$-Achse gilt: $1\,\text{LE} \mathrel{\widehat{=}} 2$ Hilfsgitterlinien, für die $y$-Achse gilt: $2\,\text{LE} \mathrel{\widehat{=}} 1$ Hilfsgitterlinien.




1.1.3 Um den Flächeninhalt A der Fläche, die der Graph von $g$ mit der $x$-Achse einschließt, zu berechnen, verwendet man den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung; die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$ von $g$:

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \int_1^3 g(x)dx = \int_1^3 \left(-2x^2+8x-6\right)dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+4x^2-6x\right]_1^3 \\ &= \left(-\frac{2}{3}\cdot 3^3+4\cdot 3^2-6\cdot 3\right)-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3+4\cdot 1^2-6\cdot 1\right)=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

Der Flächeninhalt A beträgt $\frac{8}{3}$ FE.

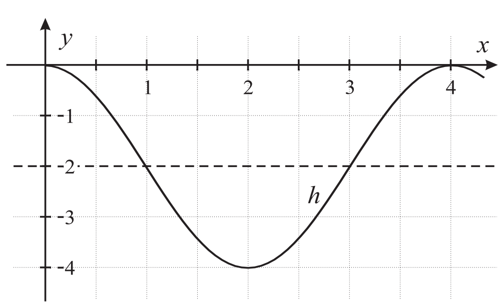
1.2.1 Es ist $f(x) = \cos(x)$ und $h(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2$.

Man erhält den Graphen von $h$ aus dem Graphen von $f$, indem man den Graphen von $f$ mit Faktor 2 in $y$-Richtung streckt, mit Faktor $\frac{\pi}{2}$ in $x$-Richtung staucht (bzw. mit Faktor $\frac{2}{\pi}$ streckt) und um 2 LE nach unten (in negative $y$-Richtung) verschiebt.

Die Periode $p$ des Graphen von $h$ ist:

$$p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{2}} = 4$$

Damit erhält man folgenden Graphen:



1.2.2 Die Nullstellen von $h$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$ erhält man durch Lösen der Gleichung $h(x) = 0$:

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 2 &= 0 \\ 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= 2 \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) &= 1 \end{aligned}$$

Die Substitution $\frac{\pi}{2}x = z$ führt zu $\cos z = 1$ mit den Lösungen $z_1 = 0$, $z_2 = 2\pi$, $z_3 = 4\pi$, usw..
Die Resubstitution $\frac{\pi}{2}x = 0$ führt zur Lösung $x_1 = 0$, die Resubstitution $\frac{\pi}{2}x = 2\pi$ führt zur Lösung $x_2 = 4$. Alle weiteren Resubstitutionen führen zu Lösungen außerhalb des Intervalls $0 \leqslant x \leqslant 4$.
Alternativ kann man die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$ auch an der Zeichnung ablesen und rechnerisch nachweisen:
Es gilt:

$$\begin{aligned} h(0) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 0\right) - 2 = 2\cos(0) - 2 = 2\cdot 1 - 2 = 0 \\ h(4) &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\cdot 4\right) - 2 = 2\cos(2\pi) - 2 = 2\cdot 1 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Somit hat $h$ für $0 \leqslant x \leqslant 4$ die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.