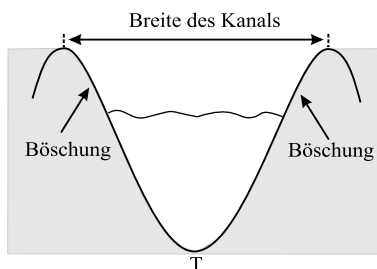


Abitur 2019 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 3 Anwendungsorientierte Analysis
(Wahlaufgabe 2 von 3)

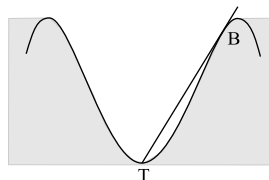
- 3 Ein Ingenieurbüro plant den Bau eines 15 Meter (m) langen, geraden Kanals, der einen gleichbleibenden Querschnitt aufweist. Das Koordinatensystem wird im Modell so gelegt, dass $T(0 | 0)$ den tiefsten Punkt des Querschnitts darstellt (siehe Abbildung). Die Randkurve des Querschnitts wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2,$$

wobei x im Bereich der Breite des Kanals liegt und ebenso wie $f(x)$ in Meter gemessen wird. Die Abbildung stellt eine nicht maßstabsgetreue Skizze des Schaubilds von f dar.



- 3.1 Berechnen Sie den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals. 3
- 3.2 Das Wasser steht im Kanal 2m hoch. 3
- 3.2.1 Zeigen Sie, dass der Wasserspiegel eine Breite von genau 4 m einnimmt. 1
- 3.2.2 Berechnen Sie den Wert von $15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$. 3
Deuten Sie diesen Term und den berechneten Wert im Sachzusammenhang.
- 3.3 Ein Laser in der Position T wird so eingestellt, dass er einen Lichtstrahl erzeugt, der in der Ebene des Kanalquerschnitts verläuft und dabei die rechte Böschung an einem Punkt $B(u | f(u))$ mit $u > 0$ berührt. 3
Bestimmen Sie die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$, die diesen Lichtstrahl modelliert.



Teil 2 Aufgabe 3

- 3.1 Den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals erhalten Sie, indem Sie die Koordinaten der Hochpunkte des Schaubilds von f berechnen. Hierzu verwenden Sie die 1. und 2. Ableitung von f . Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f'(x) = 0$ durch Ausklammern mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt nach x auf. Setzen Sie die erhaltenen x -Werte in $f''(x)$ ein. Falls das Ergebnis kleiner als Null ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Die zugehörigen y -Werte erhalten Sie, indem Sie die x -Werte in $f(x)$ einsetzen. Die Breite b des Kanals erhalten Sie, indem Sie die Differenz der x -Werte der Hochpunkte berechnen.
- 3.2.1 Setzen Sie aus Symmetriegründen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ in $f(x)$ ein und zeigen Sie damit, dass der Wasserstand bei einer Breite von 4 m genau 2 m hoch ist.
- 3.2.2 Den Wert des gegebenen Integrals erhalten Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Überlegen Sie, welche Fläche mit Hilfe des Integrals $\int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$ berechnet wird und warum diese mit 15 multipliziert wird.
- 3.3 Beachten Sie, dass der Lichtstrahl, der die rechte Böschung an einem Punkt $B(u | f(u))$ mit $u > 0$ berührt, eine Tangente an das Schaubild von f ist. Die Tangentensteigung $m_t = f'(u)$ in B muss gleich groß sein wie die Steigung zwischen den Punkten T und B . Stellen Sie damit eine Gleichung in Abhängigkeit von u auf und lösen Sie diese durch Ausklammern und mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt nach u auf. Beachten Sie, dass $u > 0$ ist. Die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$ erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen u -Wert in $m_t = f'(u)$ einsetzen.

Teil 2 Aufgabe 3

3 Es ist $f(x) = -\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2$.

- 3.1 Den höchstmöglichen Wasserstand und die Breite des Kanals erhält man, indem man die Koordinaten der Hochpunkte des Schaubilds von f berechnet. Hierzu benötigt man die 1. und 2. Ableitung von f :

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x$$
$$f''(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $f'(x) = 0$ nach x auf. Durch Ausklammern ergibt sich:

$$-\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x = 0$$
$$x \cdot \left(-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}\right) = 0$$

Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man $x_1 = 0$ und aus $-\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2} = 0$ bzw. $6 = x^2$ die Lösungen $x_2 = -\sqrt{6}$ und $x_3 = \sqrt{6}$.

Setzt man die erhaltenen x -Werte in $f''(x)$ ein, erhält man:

$$f''(0) = -\frac{3}{4} \cdot 0^2 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} > 0 \Rightarrow \text{Tiefpunkt}$$
$$f''(-\sqrt{6}) = -\frac{3}{4} \cdot (-\sqrt{6})^2 + \frac{3}{2} = -3 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$
$$f''(\sqrt{6}) = -\frac{3}{4} \cdot (\sqrt{6})^2 + \frac{3}{2} = -3 < 0 \Rightarrow \text{Hochpunkt}$$

Die zugehörigen y -Werte der Hochpunkte erhält man, indem man die x -Werte in $f(x)$ einsetzt:

$$y_2 = f(-\sqrt{6}) = -\frac{1}{16} \cdot (-\sqrt{6})^4 + \frac{3}{4} \cdot (-\sqrt{6})^2 = \frac{9}{4} = 2,25 \Rightarrow H_1(-\sqrt{6} | 2,25)$$
$$y_3 = f(\sqrt{6}) = -\frac{1}{16} \cdot (\sqrt{6})^4 + \frac{3}{4} \cdot (\sqrt{6})^2 = \frac{9}{4} = 2,25 \Rightarrow H_2(\sqrt{6} | 2,25)$$

Somit beträgt der höchstmögliche Wasserstand 2,25 m.

Die Breite b des Kanals erhält man, indem man die Differenz der x -Werte der Hochpunkte berechnet:

$$b = x_3 - x_2 = \sqrt{6} - (-\sqrt{6}) = 2 \cdot \sqrt{6} \approx 4,90$$

Somit hat der Kanal eine Breite von etwa 4,90 m.

3.2.1 Um zu zeigen, dass der Wasserspiegel bei einer Höhe von 2m eine Breite von genau 4m einnimmt, weist man nach, dass bei einer Breite von 4m der Wasserspiegel 2m hoch ist. Dazu setzt man aus Symmetriegründen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ in $f(x)$ ein:

$$f(-2) = -\frac{1}{16} \cdot (-2)^4 + \frac{3}{4} \cdot (-2)^2 = 2$$

$$f(2) = -\frac{1}{16} \cdot 2^4 + \frac{3}{4} \cdot 2^2 = 2$$

Damit ist der Wasserstand bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ genau 2m hoch.

Wegen $b = 2 - (-2) = 4$ beträgt die Breite des Wasserspiegels genau 4m.

3.2.2 Den Wert des Integrals $15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$ erhält man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx = 15 \cdot \int_{-2}^2 \left(2 - \left(-\frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{4}x^2 \right) \right) dx$$

$$= 15 \cdot \int_{-2}^2 \left(2 + \frac{1}{16}x^4 - \frac{3}{4}x^2 \right) dx$$

$$= 15 \cdot \left[2x + \frac{1}{80}x^5 - \frac{1}{4}x^3 \right]_{-2}^2$$

$$= 15 \cdot \left(2 \cdot 2 + \frac{1}{80} \cdot 2^5 - \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \left(2 \cdot (-2) + \frac{1}{80} \cdot (-2)^5 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^3 \right) \right)$$

$$= 72$$

Mit Hilfe des Integrals $\int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$ berechnet man die Querschnittsfläche des bis 2m Höhe wassergefüllten Teils des Kanals. Mit dem Term $15 \cdot \int_{-2}^2 (2 - f(x)) dx$ berechnet man

das Volumen des Wassers, welches sich bei einem Wasserstand von 2m im Kanal befindet, da die Querschnittsfläche mit der Länge des Kanals multipliziert wird. Also beträgt das Wasservolumen 72 m^3 .

3.3 Wenn der Lichtstrahl die rechte Böschung an einem Punkt $B(u \mid f(u))$ mit $u > 0$ berührt, ist die Gerade mit der Gleichung $y = a \cdot x$, die diesen Lichtstrahl modelliert, eine Tangente an das Schaubild von f .

Die Tangentensteigung $m_t = f'(u)$ in B muss gleich groß sein wie die Steigung zwischen den Punkten T und B . Durch Gleichsetzen der Steigungen erhält man eine Gleichung, die man nach u auflöst:

$$\begin{aligned}
 m_t &= m_{TB} \\
 f'(u) &= \frac{f(u) - 0}{u - 0} \\
 -\frac{1}{4}u^3 + \frac{3}{2}u &= \frac{-\frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2}{u} \\
 -\frac{1}{4}u^4 + \frac{3}{2}u^2 &= -\frac{1}{16}u^4 + \frac{3}{4}u^2 \\
 0 &= \frac{3}{16}u^4 - \frac{3}{4}u^2 \\
 0 &= u^2 \cdot \left(\frac{3}{16}u^2 - \frac{3}{4} \right)
 \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt ergibt sich $u_1 = 0$ und aus $\frac{3}{16}u^2 - \frac{3}{4} = 0$ bzw. $u^2 = 4$ erhält man die Lösungen $u_2 = -2$ und $u_3 = 2$. Wegen $u > 0$ kommt nur $u_3 = 2$ als Lösung in Frage.

Die Steigung a der Geraden mit der Gleichung $y = a \cdot x$ erhält man, indem man $u = 2$ in $m_t = f'(u)$ einsetzt, da ja diese Gerade die Tangente in B an das Schaubild von f ist:

$$a = m_t = f'(2) = -\frac{1}{4} \cdot 2^3 + \frac{3}{2} \cdot 2 = 1$$

Somit hat die Gerade die Steigung $a = 1$.