Notiz-Rand

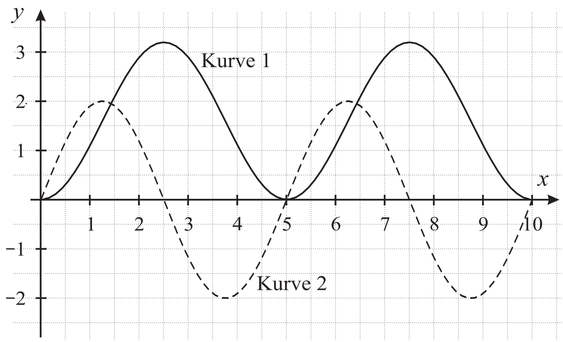
3. Aufgabe

- Anwendungsbezogene Aufgabe
- Graphen zuordnen
- Integration
- Stammfunktion

Die momentane Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge eines Menschen kann durch die Funktion f mit $f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right)$ modelliert werden (dabei ist t die Zeit in Sekunden; $f(t)$ ist in Liter pro Sekunde angegeben).
Zu Beginn der Beobachtung ($t = 0$) ist keine Luft in der Lunge vorhanden.

a) Geben Sie die Bedeutung der Funktion F mit $\mathrm{F}(t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$ im Kontext der Aufgabe an.
Bestimmen Sie $\mathrm{F}(t)$.

b) Das nachfolgende Diagramm zeigt den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge und den zeitlichen Verlauf der momentanen Änderungsrate des Luftvolumens.



Geben Sie an, welche der beiden Kurven den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in der Lunge beschreibt. Begründen Sie Ihre Wahl im Sachkontext der Aufgabenstellung.
Bestimmen Sie das maximal und das minimal mögliche Luftvolumen in der Lunge.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte während des Zeitintervalls $[0; 5]$, zu denen die Lunge jeweils die Hälfte des maximal möglichen Luftvolumens enthält.

c) Bestimmen Sie das durchschnittliche Luftvolumen in der Lunge im Zeitintervall $[0; 5]$.
Benutzen Sie dabei, dass für eine Funktion der Gestalt

$$f(x) = \cos(a \cdot x)$$

die Funktion

$$\mathrm{F}(x) = \frac{1}{a} \cdot \sin(a \cdot x)$$

eine Stammfunktion ist.

Notiz-Rand

15. Überlegen Sie, was mithilfe des Integrals berechnet wird. Bestimmen Sie eine Stammfunk-tion von $f(x)$; wenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung an.

16. Beachten Sie, dass das Luftvolumen in der Lunge nicht negativ sein kann und bestimmen Sie die Periode der beiden Kurven.
Das maximale Luftvolumen erhalten Sie zu dem Zeitpunkt, an dem $f(t)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat. Setzen Sie diesen Zeitpunkt in $\mathrm{F}(t)$ ein. Das minimale Luftvolumen ergibt sich aus der Aufgabenstellung.
Um die Zeitpunkte zu bestimmen, zu denen die Lunge die Hälfte des maximalen Luftvolumens $(\mathrm{V}_{\max})$ enthält, lösen Sie die Gleichung $\mathrm{F}(t) = \frac{\mathrm{V}_{\max}}{2}$. Beachten Sie, dass dabei mehrere Lösungen innerhalb des zu betrachtenden Zeitintervalls möglich sind.

c) Das durchschnittliche Luftvolumen $\overline{\mathrm{V}}$ in der Lunge während des Zeitintervalls $[0;5]$ erhalten Sie durch Integration und Mittelwertbildung aus $\overline{\mathrm{V}} = \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 \mathrm{F}(t)\mathrm{dt}$

Notiz-Rand

3. Aufgabe

Es ist $f(t) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right)$; $t \geqslant 0$.

a) Da $f(t)$ die Änderungsrate des Luftvolumens in der Lunge beschreibt, kann durch $\mathrm{F}(t)$ das Luftvolumen zu einem Zeitpunkt t selbst beschrieben werden, da nach dem Haupsatz der Differential- und Integralrechnung $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ gilt und sich die momentane Änderungsrate einer Funktion immer als deren erste Ableitung ergibt.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{F}(t) &= \int_0^t f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t 2 \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[-2 \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot x\right) \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}\pi}\right]_0^t \\
&= \left[-\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot x\right)\right]_0^t \\
&= -\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) - \left(-\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot 0\right)\right) \\
&= -\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) + \frac{5}{\pi}
\end{aligned}
$$

Damit ist also $\mathrm{F}(t) = -\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) + \frac{5}{\pi}$; $t \geqslant 0$.

b) Beim Einatmen nimmt das Luftvolumen in der Lunge zu, beim Ausatmen nimmt es wieder ab. Das Luftvolumen kann aber nicht negativ werden, also kommt nur Kurve 1 für den zeitlichen Verlauf des Luftvolumens in Frage. Die Kurve 2 beschreibt die momentane Änderungsrate des Luftvolumens, d.h. Kurve 2 ist die grafische Ableitung von Kurve 1.
Die Periodenlänge der Funktionen, welche das Luftvolumen und auch dessen Änderungsrate beschreiben, ist

$$p = \frac{2\pi}{\frac{2}{5}\pi} = 5$$

Laut Aufgabenstellung hat das Luftvolumen zu Beginn $t = 0$ und wegen der Periode $p = 5$ auch nach 5 Sekunden den Wert 0, ist dann also minimal.
An der Stelle $t = 2{,}5$ hat $f(t)$ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$, dies ist die hinreichende Bedingung dafür, dass $\mathrm{F}(t)$ an dieser Stelle ein Maximum besitzt:

$$\mathrm{V}_{\max} = \mathrm{F}(2{,}5) = -\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot 2{,}5\right) + \frac{5}{\pi} = -\frac{5}{\pi} \cdot (-1) + \frac{5}{\pi} = \frac{10}{\pi} \approx 3{,}2$$

Somit beträgt das maximale Luftvolumen in der Lunge etwa 3,2 Liter, das minimale Luftvolumen beträgt 0 Liter.

Um die Zeitpunkte während des Intervalls $[0;5]$ zu bestimmen, zu denen die Lunge die Hälfte des maximalen Luftvolumens $\frac{\frac{10}{\pi}}{2} = \frac{5}{\pi}$, enthält, löst man die Gleichung $\mathrm{F}(t) = \frac{5}{\pi}$:

$$-\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) + \frac{5}{\pi} = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) = 0$$

Notiz-Rand

Damit muss wegen des Verlaufs der Kosinus-Funkion gelten:

$$\frac{2}{5}\pi \cdot t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{4} = 1{,}25 \text{ oder } \frac{2}{5}\pi \cdot t = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow t_2 = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

Also enthält die Lunge nach 1,25 Sekunden und nach 3,75 Sekunden die Hälfte des maximalen Luftvolumens.

c) Das durchschnittliche Luftvolumen $\overline{\mathrm{V}}$ in der Lunge während des Zeitintervalls $[0\,;5]$ erhält man durch Integration und anschließende Mittelwertbildung. Dabei wird die angegebene Regel verwendet:

$$\begin{aligned}
\overline{\mathrm{V}} &= \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 \mathrm{F}(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5} \cdot \int_0^5 \left(-\frac{5}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) + \frac{5}{\pi}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{5}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) \cdot \frac{1}{\frac{2}{5}\pi} + \frac{5}{\pi} \cdot t\right]_0^5 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left[-\frac{25}{2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot t\right) + \frac{5}{\pi} \cdot t\right]_0^5 \\
&= \frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{25}{2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot 5\right) + \frac{5}{\pi} \cdot 5 - \left(-\frac{25}{2\pi^2} \cdot \sin\left(\frac{2}{5}\pi \cdot 0\right) + \frac{5}{\pi} \cdot 0\right)\right) \\
&= \frac{1}{5} \cdot \frac{25}{\pi} = \frac{5}{\pi} \\
&\approx 1{,}6
\end{aligned}$$

Somit beträgt das durchschnittliche Luftvolumen in der Lunge während des Zeitintervalls $[0\,;5]$ etwa 1,6 Liter.