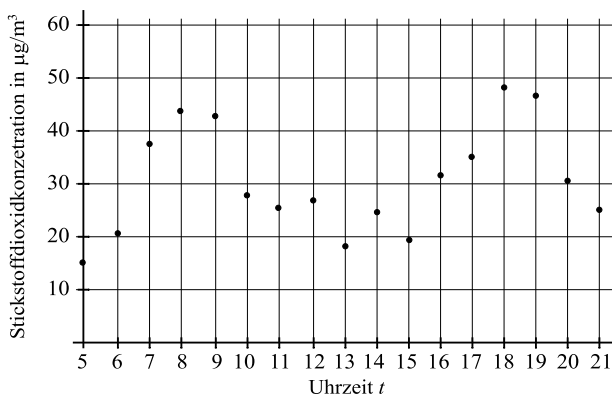


Abitur 2019 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 2 Anwendungsorientierte Analysis

(Wahlaufgabe 1 von 3)

2 Ein großer Anteil des Stickstoffdioxids (NO_2) in der Luft wird durch Verbrennungsmotoren im Straßenverkehr erzeugt.

An einer Messstation in einer süddeutschen Stadt wird die NO_2 -Konzentration in der Luft täglich aufgezeichnet. Die Abbildung zeigt die, an einem Werktag im Herbst zwischen 5 Uhr morgens und 21 Uhr abends gemessenen, NO_2 -Datenwerte in Mikrogramm pro Kubikmeter Luft ($\frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$).



- 2.1 Beschreiben Sie die Entwicklung der NO_2 -Konzentration im Tagesverlauf und interpretieren Sie dies im Sachzusammenhang. 2
- 2.2 Die Funktion f mit $f(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30$; $5 \leq t \leq 21$ modelliert den Wert der NO_2 -Konzentration $f(t)$ in $\frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ zum Zeitpunkt t dieses Tages.
- 2.2.1 Beurteilen Sie folgende Aussage: «Das Maximum von f weicht vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der NO_2 -Konzentration um mehr als 10% ab.» 2
- 2.2.2 Bestimmen Sie unter Verwendung des Modells f die beiden Zeitpunkte, an denen die Zunahme der NO_2 -Konzentration am größten ist. 3
- 2.2.3 Zum Zeitpunkt der Messung galt für die NO_2 -Konzentration in der Luft der Grenzwert $40 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$.
 Bestimmen Sie mit Hilfe von f die Uhrzeit auf die Minute genau, zu der dieser Grenzwert erstmals erreicht wurde. 3

Teil 2 Aufgabe 2

- 2.1 Beschreiben Sie den Anstieg und den Rückgang der NO_2 -Konzentration zu verschiedenen Zeiten und überlegen Sie, welche Ursache den Anstieg bewirkt haben könnte.
- 2.2.1 Beachten Sie, dass die Sinusfunktion maximal den Wert 1 annehmen kann und bestimmen Sie damit das Maximum von f . Lesen Sie den tatsächlich gemessenen maximalen Wert der NO_2 -Konzentration am Schaubild ab. Bestimmen Sie die Differenz der beiden Werte und teilen Sie das Ergebnis durch den tatsächlich gemessenen Wert.
- 2.2.2 Die beiden Zeitpunkte, an denen die Zunahme der NO_2 -Konzentration am größten ist, erhalten Sie, indem Sie die Extremstellen von $f'(t)$ mit positiver Steigung bestimmen, also die Wendestellen von f mit positiver Steigung. Hierzu verwenden Sie die 2. Ableitung von $f(t)$, die Sie mit der Kettenregel erhalten. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f''(t) = 0$ nach t auf. Substituieren Sie $\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right) = z$, bestimmen Sie die zugehörigen z -Werte und resubstituieren Sie wieder, um die t -Werte zu erhalten. Setzen Sie die erhaltenen t -Werte in $f'(t)$ ein um zu prüfen, ob die Steigung positiv ist. Bestimmen Sie die zu den entsprechenden t -Werten zugehörigen Uhrzeiten.
- 2.2.3 Um den Zeitpunkt zu bestimmen, zu der der Grenzwert von $40 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ der NO_2 -Konzentration erstmals erreicht wurde, lösen Sie die Gleichung $f(t) = 40$ nach t auf. Substituieren Sie $\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right) = z$, bestimmen Sie den zugehörigen z -Wert mit Hilfe des WTR und resubstituieren Sie wieder, um den t -Wert zu erhalten. Überlegen Sie, welche Uhrzeit zum erhaltenen t -Wert gehört.

Teil 2 Aufgabe 2

2.1 Die Entwicklung der NO_2 -Konzentration im Tagesverlauf kann folgendermaßen beschrieben werden:

Ab 5 Uhr morgens steigt die NO_2 -Konzentration zuerst langsam, dann stark bis 8 Uhr an und bleibt bis 9 Uhr hoch. Dann sinkt die NO_2 -Konzentration wieder und bleibt bis 15 Uhr auf einem niedrigen Wert. Von 15 Uhr bis 18 Uhr steigt die NO_2 -Konzentration wieder stark an und geht bis 21 Uhr wieder auf einen niedrigen Wert zurück.

Der starke Anstieg von 6 Uhr bis 8 Uhr und von 15 Uhr bis 18 Uhr lässt sich durch den Berufsverkehr und den damit verbundenen Schadstoffausstoß erklären, der in den übrigen Zeiten bei «normalem Verkehr» nicht so hoch ist.

2.2 Es ist

$$f(t) = 15 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) + 30; 5 \leq t \leq 21$$

2.2.1 Das Maximum von f beträgt $45 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$, da die Sinusfunktion maximal den Wert 1 annehmen kann, so dass gilt:

$$f(t) \leq 15 \cdot 1 + 30 = 45$$

Der tatsächlich gemessene maximale Wert der NO_2 -Konzentration beträgt etwa $49 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$.

Die Abweichung beider Werte beträgt $4 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$.

Wegen $\frac{4}{49} \approx 0,082 = 8,2\%$ weicht das Maximum von f vom tatsächlich gemessenen maximalen Wert der NO_2 -Konzentration nicht um mehr als 10% ab. Die gemachte Aussage ist also falsch.

2.2.2 Die beiden Zeitpunkte, an denen die Zunahme der NO_2 -Konzentration am größten ist, erhält man, indem man die Extremstellen von $f'(t)$ mit positiver Steigung bestimmt, also die Wendestellen von f mit positiver Steigung. Hierzu verwendet man die 2. Ableitung von $f(t)$, die man mit der Kettenregel erhält:

$$f'(t) = 15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{5} = 3\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right)$$
$$f''(t) = 3\pi \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right)\right) \cdot \frac{\pi}{5} = -\frac{3}{5}\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right)$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $f''(t) = 0$ nach t auf:

$$-\frac{3}{5}\pi^2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) = 0$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right)\right) = 0$$

Substituiert man $\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2}\right) = z$, so ergibt sich $\sin(z) = 0$ mit den Lösungen $z_1 = 0$, $z_2 = \pi$, $z_3 = 2\pi$.

Durch Resubstitution ergibt sich:

$$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{11}{2}$$

$$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) = \pi \Rightarrow t_2 = \frac{21}{2}$$

$$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) = 2\pi \Rightarrow t_3 = \frac{31}{2}$$

Setzt man die erhaltenen t -Werte in $f'(t)$ ein, ergibt sich:

$$f' \left(\frac{11}{2} \right) = 3\pi \cdot \cos \left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{11}{2} - \frac{11}{2} \right) \right) = 3\pi \cdot \cos(0) = 3\pi > 0$$

$$f' \left(\frac{21}{2} \right) = 3\pi \cdot \cos \left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{21}{2} - \frac{11}{2} \right) \right) = 3\pi \cdot \cos(\pi) = -3\pi < 0$$

$$f' \left(\frac{31}{2} \right) = 3\pi \cdot \cos \left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(\frac{31}{2} - \frac{11}{2} \right) \right) = 3\pi \cdot \cos(2\pi) = 3\pi > 0$$

Somit ist für $t_1 = \frac{11}{2}$, also um 5.30 Uhr und für $t_2 = \frac{31}{2}$, also um 15.30 Uhr die Zunahme der NO_2 -Konzentration am größten.

2.2.3 Um den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem der Grenzwert der NO_2 -Konzentration von $40 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ erstmals erreicht wurde, löst man die Gleichung $f(t) = 40$ nach t auf:

$$15 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) \right) + 30 = 40$$

$$15 \cdot \sin \left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) \right) = 10$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) \right) = \frac{2}{3}$$

Substituiert man $\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) = z$, so ergibt sich $\sin(z) = \frac{2}{3}$ mit der Lösung $z \approx 0,73$ (WTR).
Durch Resubstitution ergibt sich:

$$\frac{\pi}{5} \cdot \left(t - \frac{11}{2} \right) = 0,73 \Rightarrow t \approx 6,66$$

Wegen $0,66 \cdot 60 \text{ min} = 39,6 \text{ min}$ entspricht $t \approx 6,66$ der Uhrzeit 6 Uhr und 39 Minuten.
Somit wurde um 6.39 Uhr erstmals der Grenzwert von $40 \frac{\mu\text{g}}{\text{m}^3}$ erreicht.