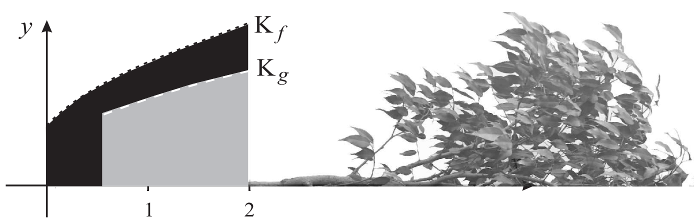
Abitur 2018 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 3 Anwendungsorientierte Analysis
(Wahlaufgabe 2 von 3)

3 Für eine Gartenschau sollen verschiedene Pflanzkübel mit einer Höhe von jeweils 2 Meter aus Kunststoff gegossen werden. Die Abbildung unten zeigt beispielhaft den halben Querschnitt eines um 90° gekippten Pflanzenkübels mit seinem Pflanzeinsatz. Der Kübel wird durch Rotation der schwarzen Fläche um die x-Achse beschrieben. Die Mantelfläche des Kübels wird hierbei mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f erzeugt (in der Abbildung gepunktet). Analog wird die Mantelfläche des Pflanzeinsatzes mit Hilfe des Schaubildes K_g der Funktion g erzeugt (in der Abbildung gestrichelt). Alle Angaben sind in Meter (m).



3.1 Zur Modellierung eines bestimmten Pflanzenkübels werden die Funktionen f und g mit $f(x)=\sqrt{x+1}$; $0 \leqslant x \leqslant 2$ und $g(x)=\sqrt{0,5\cdot x+0,5}$; $0,5 \leqslant x \leqslant 2$ verwendet. 5

Dieser Pflanzenkübel wird aus Kunststoff der Dichte 0,9 Tonnen pro Kubikmeter gefertigt.

Berechnen Sie die Masse dieses Pflanzenkübels in Tonnen.

3.2 Für einen anderen Pflanzenkübel wird die Funktion f mit $f(x)=a\cdot x^3+b\cdot x^2+1$; $0 \leqslant x \leqslant 2$ verwendet. 5

Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass in einer Höhe von 2 m der Radius des Pflanzenkübels 1,5 m ist und der kleinste Radius in einer Höhe von 1 m vorliegt.

10

Teil 2 Aufgabe 3

3.1 Das Volumen V eines Pflanzenkübels erhalten Sie, indem Sie das Volumen des Rotationskörpers berechnen, welcher entsteht, wenn die schwarze Fläche um die x-Achse rotiert. Das Volumen V_1 für das äußere Volumen erhalten Sie, wenn das Schaubild von f im Intervall $[0\,;2]$ um die x-Achse rotiert. Das Volumen V_2 für das innere Volumen erhalten Sie, wenn das Schaubild von g im Intervall $[0{,}5\,;2]$ um die x-Achse rotiert. Verwenden Sie die Formel $V_{rot} = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx$ sowie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Bestimmen Sie anschließend $V = V_1 - V_2$.

Die Masse M des Pflanzenkübels erhalten Sie, indem Sie das Volumen mit der Dichte multiplizieren.

3.2 Verwenden Sie als Ansatz $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 1\,;\ 0 \leqslant x \leqslant 2$ mit $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x$. Stellen Sie anhand der gegebenen Daten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf und lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem. Bestimmen Sie damit die Funktionsgleichung von f und prüfen Sie, ob bei $x = 1$ tatsächlich ein Minimum vorliegt, indem Sie $x = 1$ in die 2. Ableitung von f einsetzen. Um zu prüfen, ob ein absolutes Minimum vorliegt, überprüfen Sie noch die Randwerte des Intervalls $[0\,;2]$, indem Sie die x-Werte in $f(x)$ einsetzen.

Teil 2 Aufgabe 3

3.1 Es sind $f(x) = \sqrt{x+1}\,;\ 0 \leqslant x \leqslant 2$ und $g(x) = \sqrt{0,5 \cdot x + 0,5}\,;\ 0,5 \leqslant x \leqslant 2$ gegeben.
Das Volumen V eines Pflanzenkübels erhält man, indem man das Volumen des Rotationskörpers berechnet, welcher entsteht, wenn die schwarze Fläche um die x-Achse rotiert.
Das Volumen V_1 für das äußere Volumen erhält man, wenn das Schaubild von f im Intervall $[0\,;2]$ um die x-Achse rotiert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_1 &= \pi \cdot \int_0^2 (f(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^2 \left(\sqrt{x+1}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_0^2 (x+1)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^2 \\
&= \pi \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 - \left(\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 0\right)\right) \\
&= 4\pi
\end{aligned}$$

Das Volumen V_2 für das innere Volumen erhält man, wenn das Schaubild von g im Intervall $[0,5\,;2]$ um die x-Achse rotiert:

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_2 &= \pi \cdot \int_{0,5}^2 (g(x))^2\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_{0,5}^2 \left(\sqrt{0,5 \cdot x + 0,5}\right)^2\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \int_{0,5}^2 (0,5 \cdot x + 0,5)\,\mathrm{d}x \\
&= \pi \cdot \left[0,25x^2 + 0,5x\right]_{0,5}^2 \\
&= \pi \cdot \left(0,25 \cdot 2^2 + 0,5 \cdot 2 - \left(0,25 \cdot 0,5^2 + 0,5 \cdot 0,5\right)\right) \\
&= \frac{27}{16}\pi
\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 = 4\pi - \frac{27}{16}\pi = \frac{37}{16}\pi$$

Da ein Pflanzenkübel eine Dichte von 0,9 Tonnen pro Kubikmeter hat, erhält man die Masse M des Pflanzenkübels, indem man das Volumen mit der Dichte multipliziert:

$$\mathrm{M} = \frac{37}{16}\pi \cdot 0,9 \approx 6,538$$

Die Masse dieses Pflanzenkübels beträgt etwa 6,5 Tonnen.

3.2 Es ist $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + 1$; $0 \leqslant x \leqslant 2$ mit $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x$.
Wenn in einer Höhe von 2 m der Radius des Pflanzenkübels 1,5 m betragen soll, muss gelten: $f(2) = 1,5$.
Wenn der kleinste Radius in einer Höhe von 1 m vorliegt, muss gelten: $f'(1) = 0$.
Diese beiden Bedingungen führen auf folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccccc} \text{I} & a \cdot 2^3 & + & b \cdot 2^2 & + & 1 & = & 1,5 \\ \text{II} & 3a \cdot 1^2 & + & 2b \cdot 1 & & & = & 0 \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lccccc} \text{I} & 8a & + & 4b & = & 0,5 \\ \text{II} & 3a & + & 2b & = & 0 \end{array}$$

Subtrahiert man das 8-fache von Gleichung II vom 3-fachen von Gleichung I, ergibt sich: $-4b = 1,5 \;\Rightarrow\; b = -\frac{3}{8}$.
Setzt man $b = -\frac{3}{8}$ in Gleichung I ein, erhält man: $8a + 4 \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) = 0,5 \;\Rightarrow\; a = \frac{1}{4}$.
Damit erhält man die Gleichung der Funktion f:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x^3 - \frac{3}{8} \cdot x^2 + 1$$

Um zu prüfen, ob bei $x = 1$ tatsächlich ein Minimum vorliegt, setzt man $x = 1$ in die 2. Ableitung von f ein, da ja schon $f'(1) = 0$ gilt. Die Ableitungen bestimmt man mit der Potenzregel:

$$f'(x) = \frac{3}{4} \cdot x^2 - \frac{3}{4}x$$
$$f''(x) = \frac{3}{2} \cdot x - \frac{3}{4}$$

Damit ergibt sich:

$$f''(1) = \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} > 0 \;\Rightarrow\; \text{lokales Minimum}$$

Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $x = 1$ in $f(x)$ einsetzt:

$$f(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^3 - \frac{3}{8} \cdot 1^2 + 1 = \frac{7}{8}$$

Somit hat das Schaubild von f den Tiefpunkt T $\left(1 \mid \frac{7}{8}\right)$.
Um zu prüfen, ob ein absolutes Minimum vorliegt, überprüft man die Randwerte des Intervalls $[0; 2]$:

$$f(0) = \frac{1}{4} \cdot 0^3 - \frac{3}{8} \cdot 0^2 + 1 = 1$$
$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{8} \cdot 2^2 + 1 = \frac{3}{2}$$

Wegen $f(1) < f(0)$ und $f(1) < f(2)$ liegt ein absolutes Minimum vor.
Somit hat ein Pflanzkübel für $a = \frac{1}{4}$ und $b = -\frac{3}{8}$ in einer Höhe von $2\,\mathrm{m}$ einen Radius von $1{,}5\,\mathrm{m}$ und der kleinste Radius liegt in einer Höhe von $1\,\mathrm{m}$ vor.