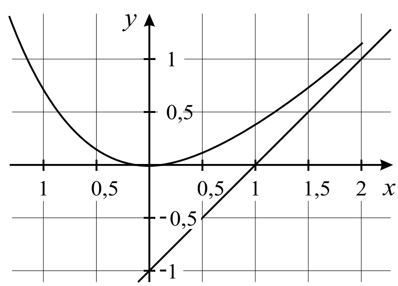
Abitur 2019 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 1 Analysis

1.1 Eine Polynomfunktion p ist gegeben durch $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$ für $x \in \mathbb{R}$, wobei $a \neq 0$ ist.

1.1.1 Bestimmen Sie die Werte von a und b, sodass die Punkte $\mathrm{P}(-1 \mid 1)$ und $\mathrm{Q}(1 \mid 0)$ auf dem Schaubild von p liegen. 3

1.1.2 Nun gilt: $b = -a$. Untersuchen Sie, ob es eine negative Nullstelle von p gibt. 2

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ für $x \in \mathbb{R}$. Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild K von f, sowie dessen Asymptote g mit der Gleichung $y = x - 1$.



1.2.1 Geben Sie den Punkt auf g an, der den kleinsten Abstand zum Tiefpunkt $\mathrm{T}(0 \mid f(0))$ von K hat, und ermitteln Sie diesen Abstand. 2

1.2.2 Das Schaubild H einer Funktion h entsteht durch Verschiebung von K. Der Tiefpunkt von H liegt bei $(1 \mid -1)$. Berechnen Sie einen Funktionsterm von h. 2

1.2.3 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind: 7

(1) K besitzt keinen Wendepunkt.

(2) Im Intervall $[1{,}841\,;\,1{,}842]$ liegt ein x_0, sodass $f(x_0) = 1$ gilt.

(3) Es gibt keine Normale an K, die g senkrecht schneidet.

1.2.4 Das Schaubild K, die beiden Geraden mit der Gleichung $x = -c$ bzw. $x = c$ mit $c > 0$, und die Gerade g umschließen eine Fläche. Bestimmen Sie c, sodass der Inhalt dieser Fläche den Wert 2 hat. 4

20

Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Setzen Sie die Koordinaten der Punkte P und Q jeweils in $p(x)$ ein und lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem.

1.1.2 Setzen Sie $b = -a$ in $p(x)$ ein. Lösen Sie die Gleichung $p(x) = 0$ durch Ausklammern nach x auf. Verwenden Sie den Satz vom Nullprodukt.

1.2.1 Den y-Wert des Tiefpunkts T von K erhalten Sie, indem Sie $x = 0$ in $f(x)$ einsetzen. Beachten Sie, dass der Punkt Q auf g, der den kleinsten Abstand zum Tiefpunkt T von K hat, der Schnittpunkt des Lots von T auf g mit g ist. Durch Einzeichnen und Ablesen erhalten Sie die Koordinaten von Q. Den Abstand d von Q zu T erhalten Sie mit Hilfe des Satzes des Pythagoras.

1.2.2 Überlegen Sie anhand der Verschiebung des Tiefpunkts, um wie viele Längeneinheiten K in x-Richtung bzw. in y-Richtung verschoben wird. Verwenden Sie $h(x) = f(x-c)+d$, wenn $c > 0$ die Verschiebung nach rechts und $d > 0$ die Verschiebung nach oben beschreibt.

1.2.3 (1) Einen möglichen Wendepunkt von K erhalten Sie mit Hilfe der 2. Ableitung von f. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf. Falls es keine reelle Lösung gibt, besitzt K keinen Wendepunkt.

(2) Setzen Sie die x-Werte des gegebenen Intervalls in $f(x)$ ein und vergleichen Sie die Ergebnisse in Bezug zu $f(x_0) = 1$.

(3) Bestimmen Sie die Steigung m_n der Normalen an K, die zu g senkrecht steht, und die Steigung m_t der zugehörigen Tangente (negativer Kehrwert der Steigung der Normalen). Um diese Tangente zu bestimmen, lösen Sie die Gleichung $f'(x) = m_t$ nach x auf. Falls es keine reelle Lösung gibt, besitzt K keine Normale, die zu g senkrecht steht.

1.2.4 Den Flächeninhalt A der Fläche, die das Schaubild K, die beiden Geraden mit der Gleichung $x = -c$ bzw. $x = c$ mit $c > 0$ und die Gerade g umschließen, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals in Abhängigkeit von c. Beachten Sie, dass K oberhalb der Geraden g verläuft. Verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Um c so zu bestimmen, dass der Inhalt dieser Fläche den Wert 2 hat, lösen Sie die Gleichung $\mathrm{A} = 2$ nach c auf. Hierzu multiplizieren Sie die Gleichung mit e^c und substituieren anschließend $e^c = z$. Lösen Sie die entstandene quadratische Gleichung mit Hilfe der abc-Formel nach z auf und resubstituieren Sie wieder. Durch Logarithmieren erhalten Sie eine Lösung für c.

Teil 2 Aufgabe 1

Es ist $p(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$.

1.1.1 Um die Werte von a und b so zu bestimmen, dass die Punkte P$(-1 \mid 1)$ und Q$(1 \mid 0)$ auf dem Schaubild von p liegen, setzt man diese jeweils in $p(x)$ ein:

$$\begin{array}{llcccc} \text{I} & 1 & = & a\cdot(-1)^3 & + & b\cdot(-1)^2 \\ \text{II} & 0 & = & a\cdot 1^3 & + & b\cdot 1^2 \end{array}$$

Dies führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{llcccc} \text{I} & 1 & = & -a & + & b \\ \text{II} & 0 & = & a & + & b \end{array}$$

Addiert man Gleichung I zu Gleichung II, ergibt sich: $1 = 2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$.
Setzt man $b = \frac{1}{2}$ in Gleichung I ein, erhält man: $1 = -a + \frac{1}{2} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$.

1.1.2 Setzt man $b = -a$ in $p(x)$ ein, erhält man: $p(x) = a \cdot x^3 - a \cdot x^2$.
Um zu untersuchen, ob es eine negative Nullstelle von p gibt, löst man die Gleichung $p(x) = 0$ durch Ausklammern nach x auf:

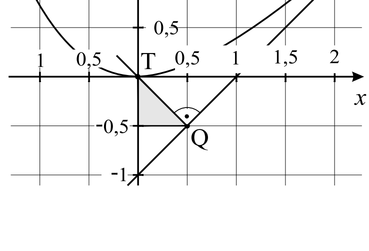
$$a \cdot x^3 - a \cdot x^2 = 0$$
$$ax^2 \cdot (x-1) = 0$$

Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man aus $ax^2 = 0$ die Nullstelle $x_1 = 0$ und aus $x - 1 = 0$ die Nullstelle $x_2 = 1$.
Somit hat p keine negative Nullstelle.

1.2.1 Den y-Wert des Tiefpunkts T von K erhält man, indem man $x = 0$ in $f(x) = x - 1 + e^{-x}$ einsetzt:

$$y = f(0) = 0 - 1 + e^{-0} = -1 + 1 = 0 \Rightarrow \text{T}(0 \mid 0)$$

Der Punkt Q auf g, der den kleinsten Abstand zum Tiefpunkt T von K hat, ist der Schnittpunkt des Lots von T auf g mit g. Durch Einzeichnen des Lots und Ablesen erhält man die Koordinaten Q$(0,5 \mid -0,5)$.



Den Abstand d von Q zu T erhält man mit Hilfe des Satzes des Pythagoras:

$$\mathrm{d}^2 = 0,5^2 + 0,5^2 \;\Rightarrow\; \mathrm{d} = \sqrt{0,25+0,25} = \sqrt{0,5} \approx 0,71$$

1.2.2 Der Tiefpunkt von H liegt bei $(1 \mid -1)$, der Tiefpunkt von K im Ursprung $\mathrm{O}(0 \mid 0)$, also wird der Tiefpunkt von K um eine Längeneinheit nach rechts und eine Längeneinheit nach unten verschoben. Damit entsteht das Schaubild H der Funktion h durch Verschiebung von K um eine Längeneinheit nach rechts und eine Längeneinheit nach unten. Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x-1) - 1 \\ &= (x-1) - 1 + e^{-(x-1)} - 1 \\ &= x - 3 + e^{-x+1} \end{aligned}$$

1.2.3 (1) Einen möglichen Wendepunkt von K erhält man mit Hilfe der 2. Ableitung von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - 0 + e^{-x} \cdot (-1) = 1 - e^{-x} \\ f''(x) &= 0 - e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} \end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung $f''(x) = 0$ führt zu $e^{-x} = 0$. Da diese Gleichung keine reelle Lösung hat, besitzt K keinen Wendepunkt.

(2) Setzt man $x_1 = 1,841$ und $x_2 = 1,842$ in $f(x)$ ein, erhält man:

$$\begin{aligned} f(1,841) &= 1,841 - 1 + e^{-1,841} \approx 0,999658 < 1 \\ f(1,842) &= 1,842 - 1 + e^{-1,842} \approx 1,000500 > 1 \end{aligned}$$

Somit liegt ein x_0 im Intervall $[1,841\,;\,1,842]$, sodass $f(x_0) = 1$ gilt.

(3) Eine Normale an K, die g senkrecht schneidet, hat die Steigung $m_n = -1$ (negativer Kehrwert der Steigung von g). Damit hat die zugehörige Tangente an K die Steigung $m_t = 1$ (negativer Kehrwert der Steigung der Normalen). Um diese Tangente zu bestimmen, löst man die Gleichung $f'(x) = 1$ nach x auf:

$$1 - e^{-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; e^{-x} = 0$$

Da diese Gleichung keine Lösung hat, gibt es keine Tangente an K mit Steigung 1.
Damit gibt es auch keine Normale mit Steigung -1 an K.
Somit gibt es keine Normale an K, die g senkrecht schneidet.

1.2.4 Den Flächeninhalt A der Fläche, die das Schaubild K, die beiden Geraden mit der Gleichung $x = -c$ bzw. $x = c$ mit $c > 0$ und die Gerade g umschließen, erhält man mit Hilfe eines Integrals in Abhängigkeit von c. Da K oberhalb der Geraden g verläuft, ergibt sich mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_{-c}^{c} (f(x) - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-c}^{c} \big(x - 1 + e^{-x} - (x-1)\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-c}^{c} \big(e^{-x}\big)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_{-c}^{c} \\
&= \left[-e^{-x}\right]_{-c}^{c} \\
&= -e^{-c} - \Big(-e^{-(-c)}\Big) \\
&= -e^{-c} + e^{c}
\end{aligned}
$$

Um c so zu bestimmen, dass der Inhalt dieser Fläche den Wert 2 hat, löst man die Gleichung $\mathrm{A} = 2$ nach c auf:

$$
\begin{aligned}
-e^{-c} + e^{c} &= 2 \\
-\frac{1}{e^{c}} + e^{c} &= 2 \\
-1 + e^{c} \cdot e^{c} &= 2 \cdot e^{c} \\
-1 + (e^{c})^2 &= 2 \cdot e^{c} \\
(e^{c})^2 - 2 \cdot e^{c} - 1 &= 0
\end{aligned}
$$

Substituiert man $e^c = z$, so ergibt sich: $0 = z^2 - 2z - 1$.
Mit Hilfe der *abc*-Formel erhält man die Lösungen $z_1 \approx 2,41$ und $z_2 \approx -0,41$.
Die Resubstitution $e^c = 2,41$ ergibt

$$c_1 = \ln(2,41) \approx 0,88$$

Die Resubstitution $e^c = -0,41$ ergibt keine weitere Lösung.
Somit erhält man $c \approx 0,88$.