Notiz-Rand

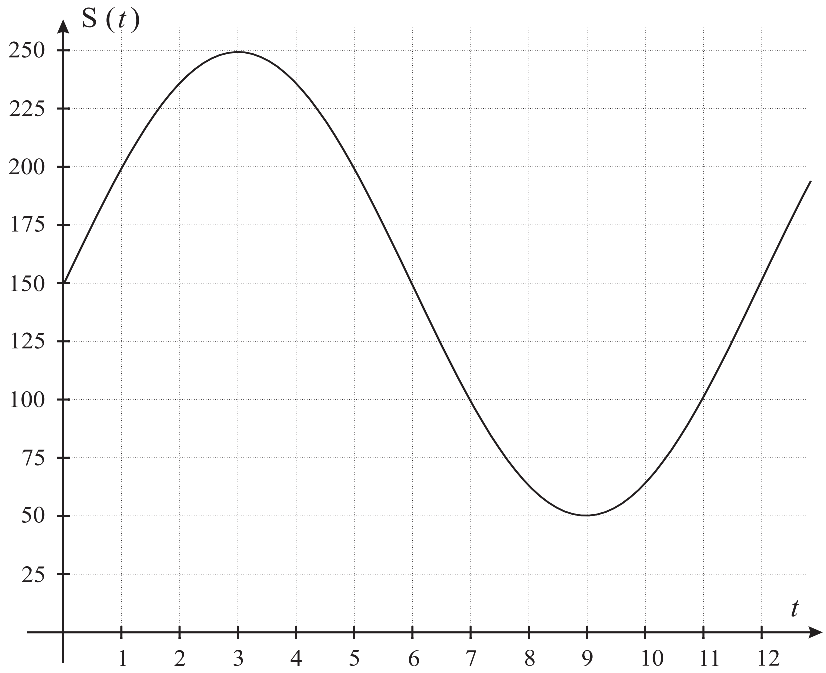
2a. Aufgabe

- Anwendungsbezogene Aufgabe
- Funktionsterm bestimmen
- Änderungsrate
- Gleichung lösen

In Freiburg im Breisgau, der wärmsten Stadt in Deutschland, scheint die Sonne im März ca. 100 Stunden; zwei Monate später sind es ca. 200 Stunden.
Die Sonnenscheindauer eines Monats soll in Abhängigkeit von der Zeit t (t in Monaten, $t = 0$ im April) modellhaft durch eine Funktion S mit

$$S(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right);\ a, b \in \mathbb{R}$$

($S(t)$ in Stunden) beschrieben werden.



a) Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b für die obigen Daten.
Berechnen Sie, welche Sonnenscheindauer sich aus dem Modell für den Monat Oktober ergibt.

b) Berechnen Sie die prozentuale Abweichung vom Modell zur Wirklichkeit, wenn im Oktober in Freiburg die Sonne tatsächlich 156 Stunden scheint.
Geben Sie den Wertebereich der Sonnenscheindauer an.

c) Berechnen Sie, in welchem Zeitraum des Jahres die Sonne mehr als 235 Stunden pro Monat scheint.

d) Bestimmen Sie diejenigen Monate, in denen sich die Sonnenscheindauer am raschesten ändert.

Notiz-Rand

14. Stellen Sie mit den gegebenen Daten zwei Gleichungen auf und beachten Sie, dass $t = 0$ dem Monat April entspricht; im März ist $t = -1$, im Mai ist $t = 1$.

    Überlegen Sie, welches t zum Monat Oktober gehört und berechnen Sie den zugehörigen Funktionswert.

15. Bestimmen Sie die Differenz von tatsächlicher und berechneter Sonnenscheindauer und teilen Sie das Ergebnis durch die tatsächliche Anzahl der Sonnenscheinstunden.

    Den Wertebereich von S erhalten Sie durch Bestimmung der Minima und Maxima von $\mathrm{S}(t)$. Beachten Sie, dass $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ gilt.

16. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese durch Substitution; beachten Sie, dass $\sin x = \sin(\pi - x)$; $0 \leqslant x \leqslant \pi$ gilt. Überlegen Sie, welcher Zeitraum dazugehört.

17. Die Änderung der Sonnenscheindauer ist $\mathrm{S}'(t)$. Bestimmen Sie die Extremwerte von $\mathrm{S}'(t)$ mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $\mathrm{S}'(t)$, also mit $\mathrm{S}''(t)$ und $\mathrm{S}'''(t)$.

Notiz-Rand

Für $S(t) = a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$ werden die Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ mithilfe der gegebenen Daten durch Aufstellen zweier Gleichungen bestimmt:
Im März ist $t = -1$, im Mai ist $t = 1$, also:

$$\begin{array}{lrcllcllcl} \text{I} & S(-1) & = & 100 \Rightarrow & a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (-1)\right) & = & 100 \Rightarrow & a - 0{,}5b & = & 100 \\ \text{II} & S(1) & = & 200 \Rightarrow & a + b \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 1\right) & = & 200 \Rightarrow & a + 0{,}5b & = & 200 \end{array}$$

Subtrahiert man I von II, ergibt sich $b = 100$.

Setzt man $b = 100$ in I ein, erhält man: $a - 0{,}5 \cdot 100 = 100 \Rightarrow a = 150$.
Somit erhält man als Funktionsgleichung:

$$S(t) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

Für Oktober gilt $t = 6$, somit ist $S(6) = 150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = 150$.
Im Oktober scheint die Sonne 150 Stunden.

b) Wenn in Freiburg im Oktober die Sonne tatsächlich 156 Stunden scheint, beträgt die Differenz zum Modell 6 Stunden; also ist die prozentale Abweichung vom Modell zur Wirklichkeit

$$\frac{6}{156} \approx 0{,}03846 \approx 3{,}8\,\%$$

Den Wertebereich von S erhält man durch Betrachtung der Extremwerte von $S(t)$:
Wegen $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$ erhält man als Minimum $150 + 100 \cdot (-1) = 50$ und als Maximum $150 + 100 \cdot 1 = 250$.
Der Wertebereich von S ist somit $[50; 250]$.

c) Man erhält den Zeitraum, in welchem die Sonne mehr als 235 Stunden pro Monat scheint, indem man die Ungleichung $S(t) > 235$ löst:

$$150 + 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) > 235 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) > \frac{85}{100} = \frac{17}{20}$$

Substituiert man $z = \frac{\pi}{6} \cdot t$, folgt weiter: $\sin(z) > \frac{17}{20}$
Wegen des Verlaufs der Sinusfunktion und $\sin(x) = \sin(\pi - x)$ für $0 \leqslant x \leqslant \pi$ erhält man mit $z = \sin^{-1}\left(\frac{17}{20}\right) \approx 1{,}016$ als Lösungen:

$$1{,}016 < z < \pi - 1{,}016 \approx 2{,}126$$

Die Resubstitution $\frac{\pi}{6} \cdot t = z$ liefert:

$$1{,}016 < \frac{\pi}{6} \cdot t < 2{,}126 \Leftrightarrow \frac{1{,}016 \cdot 6}{\pi} < t < \frac{2{,}126 \cdot 6}{\pi} \Rightarrow 1{,}94 < t < 4{,}06$$

Damit scheint die Sonne in Freiburg etwa zwischen Juni ($t_1 \approx 2$) und August ($t_2 \approx 4$) mehr als 235 Stunden pro Monat.

d) Die Änderung der Sonnenscheindauer ist $S'(t) = 100 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{50}{3}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$.

Notiz-Rand

Die Extremwerte von $S'(t)$ erhält man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $S'(t)$, also $S''(t)$ und $S'''(t)$:

$$S''(t) = -\frac{50\pi}{3} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$
$$S'''(t) = -\frac{25\pi^2}{9} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) \cdot \frac{\pi}{6} = -\frac{25\pi^3}{54} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right)$$

Die notwendige Bedingung $S''(t) = 0$ führt zu $-\frac{25\pi^2}{9} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0$ bzw. $\sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot t\right) = 0$
Substituiert man $z = \frac{\pi}{6} \cdot t$, so erhält man $\sin z = 0$ mit den Lösungen $z_k = k \cdot \pi\,; k \in \mathbb{Z}$.
Die Resubstitution $\frac{\pi}{6} \cdot t = z$ ergibt:

$$\frac{\pi}{6} \cdot t = 0 \Rightarrow t_1 = 0$$
$$\frac{\pi}{6} \cdot t = \pi \Rightarrow t_2 = 6$$

Weitere Lösungen sind nicht relevant, da sich dieselben Monate ergeben.
Setzt man $t_1 = 0$ und $t_2 = 6$ in $S'''(t)$ ein, so ergibt sich:

$$S'''(0) = -\frac{25\pi^3}{54} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0\right) = -\frac{25\pi^3}{54} < 0 \Rightarrow \text{Maximum}$$
$$S'''(6) = -\frac{25\pi^3}{54} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 6\right) = \frac{25\pi^3}{54} > 0 \Rightarrow \text{Minimum}$$

Somit ändert sich die Sonnenscheindauer am raschesten im April ($t = 0$) und im Oktober ($t = 6$).