Notiz-Rand

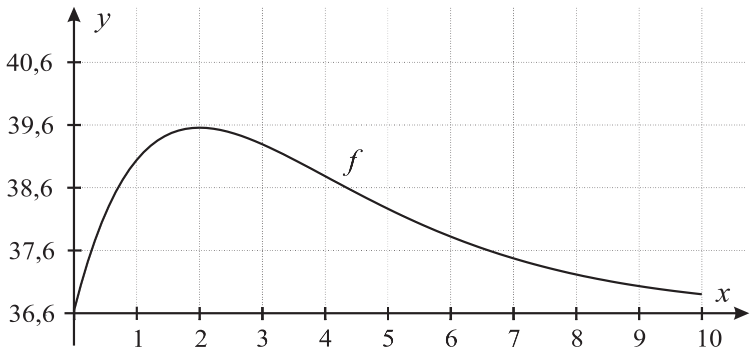
2. Aufgabe

- Anwendungsbezogene Aufgabe
- Mittelwert durch Integration
- Stammfunktion
- Funktionenschar

Eine Schülerin ist an einem grippalen Infekt erkrankt. Die Funktion f mit

$$f(t) = 4t \cdot e^{-0,5t} + 36,6\ ;\ t > 0$$

modelliert ihre Körpertemperatur während des Infektes. Dabei gibt t die Zeit in Tagen nach Auftreten des Infektes und $f(t)$ die Körpertemperatur in °C an.
Es gilt $f'(t) = (4-2t) \cdot e^{-0,5t}$. Der Graph von f hat die folgende Gestalt:



a) Berechnen Sie die höchste Körpertemperatur der Schülerin während des Infektes.
Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion d mit $d(t) = 4t \cdot e^{-0,5t}$ im Intervall $[0; 10]$ und beschreiben Sie die Bedeutung der Funktion d im Sachzusammenhang. (Normaltemperatur: 36,6°C)

b) Zeigen Sie, dass $\mathrm{F}(t) = (-8t-16) \cdot e^{-0,5t} + 36,6t$ eine mögliche Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie die durchschnittliche Körpertemperatur der Schülerin innerhalb der ersten Woche des Infektes.

Es gibt eine Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt und dann genau zwei Tage später erneut erreicht wird. Bestimmen Sie diese Temperatur und die Zeitpunkte, zu denen sie erreicht wird.

c) Die zeitlichen Verläufe der Körpertemperatur anderer Personen während eines Infektes können durch die Funktionenschar h_k mit $h_k(t) = \frac{2}{k} \cdot t \cdot e^{-kt} + 36,6\ ;\ k > 0$ modelliert werden.

Jeder Graph der Schar hat einen Hochpunkt H_k. Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Hochpunktes. [Kontrolle: $\mathrm{H}_k\left(\frac{1}{k} \mid \frac{2}{ek^2} + 36,6\right)$]
Der Krankheitsverlauf wird kritisch, wenn das Maximum der Körpertemperatur 41°C oder mehr erreicht. Bestimmen Sie diejenigen Werte des Parameters k, für die der Krankheitsverlauf kritisch wird.

Notiz-Rand

Die höchste Körpertemperatur der Schülerin während des Infektes erhalten Sie, indem Sie die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f mit der 1. und 2. Ableitung von f berechnen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f'(t) = 0$ nach t auf. Setzen Sie den erhaltenen t-Wert in $f''(t)$ ein. Falls $f''(t) < 0$ handelt es sich um einen lokalen Hochpunkt. Beachten Sie, dass keine weiteren Extremstellen vorliegen. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen t-Wert in $f(t)$ einsetzen.

Die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f erhalten Sie mit der 2. Ableitung von f. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f''(t) = 0$ nach t auf. Beachten Sie, dass f'' beim erhaltenen t-Wert einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen t-Wert in $f(t)$ einsetzen. Beachten Sie, dass bei einem Wendepunkt die Steigung maximal oder minimal ist.

b) Um zu zeigen, dass F eine Stammfunktion von f ist, leiten Sie F mithilfe der Produkt- und Kettenregel ab. Falls $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ ist F eine Stammfunktion von f.

Die durchschnittliche Körpertemperatur $\overline{\mathrm{T}}$ für $t \in [0; 7]$ erhalten Sie mithilfe eines Integrals: $\overline{\mathrm{T}} = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Die Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t und dann genau zwei Tage später $(t+2)$ erneut erreicht wird, erhalten Sie, indem Sie die Gleichung. $f(t) = f(t+2)$ «von Hand» oder mithilfe des Taschenrechners lösen. Die zugehörige Temperatur T erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen t-Wert in $f(t)$ einsetzen.

c) Die Koordinaten des Hochpunkts H_k erhalten Sie mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $h_k(t)$, die Sie mit der Produkt- und Kettenregel bestimmen. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung ${h_k}'(t) = 0$ nach t auf. Setzen Sie den erhaltenen t-Wert in ${h_k}''(t)$ ein. Falls ${h_k}''(t) < 0$ handelt es sich um einen lokalen Hochpunkt. Beachten Sie, dass keine weiteren Extremstellen vorliegen. Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den erhaltenen t-Wert in $h_k(t)$ einsetzen.

Um diejenigen Werte des Parameters k, für die der Krankheitsverlauf kritisch wird, zu bestimmen, betrachten Sie die y-Werte von H_k, die größer oder gleich 41 sind. Stellen Sie eine Ungleichung auf und lösen Sie diese nach k auf. Beachten Sie, dass $k > 0$ ist.

Notiz-Rand

Es ist $f(t) = 4t \cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6\,;\quad t > 0$ (t in Tagen, $f(t)$ in °C) mit $f'(t) = (4-2t)\cdot e^{-0{,}5t}$.

a) Die höchste Körpertemperatur der Schülerin während des Infektes erhält man, indem man die Koordinaten des Hochpunkts des Graphen von f mit der 1. und 2. Ableitung von f berechnet, die man mit der Produkt- und Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (4-2t)\cdot e^{-0{,}5t} \\ f''(t) &= -2\cdot e^{-0{,}5t} + (4-2t)\cdot e^{-0{,}5t}\cdot(-0{,}5) = (-4+t)\cdot e^{-0{,}5t} \end{aligned}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $f'(t) = 0$ nach t auf. Da $e^{-0{,}5t} \neq 0$ ist, gilt:

$$(4-2t)\cdot e^{-0{,}5t} = 0 \;\Rightarrow\; 4-2t = 0 \;\Rightarrow\; t = 2$$

Setzt man $t = 2$ in $f''(t)$ ein, ergibt sich:

$$f''(2) = (-4+2)\cdot e^{-0{,}5\cdot 2} = -2e^{-1} < 0 \;\Rightarrow\; \text{lokaler Hochpunkt}$$

Da keine weiteren Extremstellen vorliegen, liegt an dieser Stelle das absolute Maximum. Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $t = 2$ in $f(t)$ einsetzt:

$$y = f(2) = 4\cdot 2\cdot e^{-0{,}5\cdot 2} + 36{,}6 \approx 39{,}54 \;\Rightarrow\; \mathrm{H}(2\,|\,39{,}54)$$

Somit beträgt die höchste Körpertemperatur der Schülerin während des Infekts etwa 39,5°C.

Die Koordinaten des Wendepunktes W des Graphen von f erhält man mit der 2. Ableitung von f. Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $f''(t) = 0$ nach t auf. Da $e^{-0{,}5t} \neq 0$ ist, gilt:

$$(-4+t)\cdot e^{-0{,}5t} = 0 \;\Rightarrow\; -4+t = 0 \;\Rightarrow\; t = 4$$

Da f'' bei $t = 4$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ hat, handelt es sich um eine Wendestelle.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $t = 4$ in $f(t)$ einsetzt:

$$y = f(4) = 4\cdot 4\cdot e^{-0{,}5\cdot 4} + 36{,}6 \approx 38{,}77 \;\Rightarrow\; \mathrm{W}(4\,|\,38{,}77)$$

Somit hat der Wendepunkt die Koordinaten W$(4\,|\,38{,}77)$.
Damit ändert sich die Körpertemperatur der Schülerin vier Tage nach dem Auftreten des Infekts am stärksten. Sie beträgt zu diesem Zeitpunkt etwa 38,8°C.

Wegen $d(t) = f(t) - 36{,}6$ gibt die Funktion d die Differenz der Körpertemperatur während des Infekts zu 36,6°C (Normaltemperatur) an, also die Erhöhung der Körpertemperatur während des Infekts.

b) Um zu zeigen, dass $\mathrm{F}(t) = (-8t-16)\cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6t$ eine mögliche Stammfunktion von f ist, leitet man F mithilfe der Produkt- und Kettenregel ab:

$$\begin{aligned} \mathrm{F}'(t) &= -8\cdot e^{-0{,}5t} + (-8t-16)\cdot e^{-0{,}5t}\cdot(-0{,}5) + 36{,}6 \\ &= (-8+4t+8)\cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6 \\ &= 4t\cdot e^{-0{,}5t} + 36{,}6 \\ &= f(t) \end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ ist F eine Stammfunktion von f.

Notiz-Rand

Die durchschnittliche Körpertemperatur $\overline{\mathrm{T}}$ der Schülerin innerhalb der ersten Woche, also für $t \in [0;7]$, erhält man mithilfe eines Integrals:

$$\overline{\mathrm{T}} = \frac{1}{7-0}\int_0^7 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{7}\cdot\left[(-8t-16)\cdot e^{-0,5t} + 36,6t\right]_0^7 \approx 38,58$$

Somit beträgt die durchschnittliche Körpertemperatur innerhalb der ersten Woche des Infekts etwa $38,6°\mathrm{C}$.

Die Temperatur, die zu einem bestimmten Zeitpunkt t und dann genau zwei Tage später $(t+2)$ erneut erreicht wird, erhält man, indem man folgende Gleichung löst:

$$\begin{aligned}
f(t) &= f(t+2)\\
4t\cdot e^{-0,5t}+36,6 &= 4\cdot(t+2)\cdot e^{-0,5\cdot(t+2)}+36,6\\
4t\cdot e^{-0,5t} &= (4t+8)\cdot e^{-0,5t-1}\\
4t\cdot e^{-0,5t} &= (4t+8)\cdot e^{-0,5t}\cdot e^{-1}\\
4t &= (4t+8)\cdot e^{-1}\\
4t &= 4t\cdot e^{-1}+8\cdot e^{-1}\\
4t-4t\cdot e^{-1} &= 8\cdot e^{-1}\\
t\cdot\left(4-4\cdot e^{-1}\right) &= 8\cdot e^{-1}\\
t &= \frac{8\cdot e^{-1}}{4-4\cdot e^{-1}}\\
t &\approx 1,16
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Gleichung

$$4t\cdot e^{-0,5t}+36,6 = 4\cdot(t+2)\cdot e^{-0,5\cdot(t+2)}+36,6$$

auch mithilfe des Taschenrechners lösen. Man erhält auch hier $t\approx 1,16$.
Damit wird nach etwa $1,2$ und nach etwa $3,2$ Tagen dieselbe Temperatur erreicht.
Die zugehörige Temperatur T erhält man, indem man $t\approx 1,16$ in $f(t)$ einsetzt:

$$\mathrm{T}\approx f(1,16) = 4\cdot 1,16\cdot e^{-0,5\cdot 1,16}+36,6\approx 39,20$$

Somit wird nach etwa $1,2$ und nach etwa $3,2$ Tagen eine Körpertemperatur von etwa $39,2°\mathrm{C}$ erreicht.

c) Es ist $h_k(t) = \frac{2}{k}\cdot t\cdot e^{-kt}+36,6;\ k>0$.
Die Koordinaten des Hochpunkts H_k erhält man mithilfe der 1. und 2. Ableitung von $h_k(t)$, die man mit der Produkt- und Kettenregel bestimmt:

$$\begin{aligned}
{h_k}'(t) &= \frac{2}{k}\cdot e^{-kt}+\frac{2}{k}\cdot t\cdot e^{-kt}\cdot(-k) = \left(\frac{2}{k}-2t\right)\cdot e^{-kt}\\
{h_k}''(t) &= -2\cdot e^{-kt}+\left(\frac{2}{k}-2t\right)\cdot e^{-kt}\cdot(-k) = (-4+2kt)\cdot e^{-kt}
\end{aligned}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung ${h_k}'(t)=0$ nach t auf. Da $e^{-0,5kt}\neq 0$ ist, gilt:

$$\left(\frac{2}{k}-2t\right)\cdot e^{-kt} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{k}-2t=0 \;\Rightarrow\; t=\frac{1}{k}$$

Notiz-Rand

Setzt man $t = \frac{1}{k}$ in $h_k''(t)$ ein, ergibt sich:

$$h_k''\left(\frac{1}{k}\right) = \left(-4 + 2k \cdot \frac{1}{k}\right) \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k}} = -2e^{-1} < 0 \Rightarrow \text{ lokaler Hochpunkt}$$

Da keine weiteren Extremstellen vorliegen, liegt an dieser Stelle das absolute Maximum. Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man $t = \frac{1}{k}$ in $h_k(t)$ einsetzt:

$$y = h_k\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{2}{k} \cdot \frac{1}{k} \cdot e^{-k \cdot \frac{1}{k}} + 36{,}6 = \frac{2}{k^2} \cdot e^{-1} + 36{,}6 = \frac{2}{ek^2} + 36{,}6$$

Somit hat der Hochpunkt H_k die Koordinaten $\mathrm{H}_k\left(\frac{1}{k} \mid \frac{2}{ek^2} + 36{,}6\right)$.

Um diejenigen Werte des Parameters k, für die der Krankheitsverlauf kritisch wird, zu bestimmen, betrachtet man die y-Werte von H_k, die größer oder gleich 41 sind. Also löst man folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned} \frac{2}{ek^2} + 36{,}6 &\geqslant 41 \\ \frac{2}{ek^2} &\geqslant 4{,}4 \\ \frac{2}{4{,}4e} &\geqslant k^2 \\ \sqrt{\frac{2}{4{,}4e}} &\geqslant |k| \end{aligned}$$

Wegen $k > 0$ wird der Krankheitsverlauf für $0 < k \leqslant \sqrt{\frac{2}{4{,}4e}}$ kritisch.