Abitur 2018 Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 2 Anwendungsorientierte Analysis
(Wahlaufgabe 1 von 3)

2 Um Zugvögel beim Fliegen zu beobachten setzen Forscher spezielle, sehr leichte Drohnen ein. Die Drohne startet vom Boden aus und fliegt nach starker Beschleunigung hinter den Vögeln her. Die Geschwindigkeit der Drohne kann modellhaft durch die Funktion v mit

$v(t) = 25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}$; $t \geqslant 0$

beschrieben werden. Dabei ist t die Zeit in Sekunden (s) seit dem Start der Drohne $(t = 0)$, $v(t)$ gibt die Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$ zum Zeitpunkt t an.

2.1 Zeichnen Sie das Schaubild von v für $0 \leqslant t \leqslant 100$. 4

Bestimmen Sie die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde, an die sich die Geschwindigkeit der Drohne nach diesem Modell annähert.

2.2 Berechnen Sie $\int_0^{50} v(t)\,\mathrm{d}t$. 4

Interpretieren Sie das Integral im Sachzusammenhang.

2.3 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit entspricht der Beschleunigung dieser Drohne. 3
Begründen Sie, dass die Drohne beim Start die größte Beschleunigung hat.

Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Beschleunigung geringer als $0{,}5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist.

10

Teil 2 Aufgabe 2

2.1 Um das Schaubild von v zu zeichnen, erstellen Sie eine Wertetabelle. Beachten Sie, dass e^{-t} für $t \longrightarrow \infty$ gegen Null geht.

Die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde erhalten Sie, indem Sie mit 3600 erweitern:

2.2 Das gegebene Integral berechnen Sie mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. Beachten Sie, dass mit Hilfe des Integrals der zurückgelegte Weg berechnet wird.

2.3 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit (Beschleunigung) erhalten Sie mit Hilfe der ersten Ableitung von v, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Um zu begründen, dass die Drohne beim Start die größte Beschleunigung hat, weisen Sie nach, dass $v'(t)$ streng monoton fallend ist. Verwenden Sie dazu beispielweise das Verhalten von e^{-t} für größer werdende t-Werte oder $v''(t)$, die Sie mit der Kettenregel bestimmen.

Falls $v''(t) < 0$ ist $v'(t)$ streng monoton fallend.

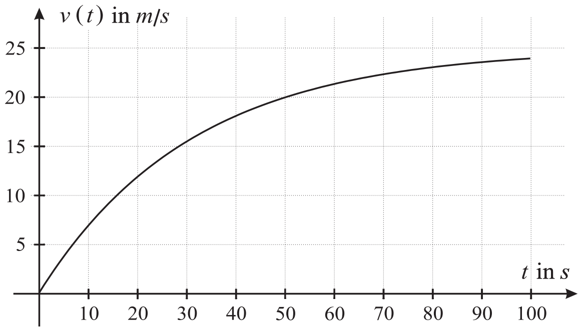
Den Zeitpunkt, ab dem die Beschleunigung geringer als $0,5\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist, erhalten Sie, indem Sie die Gleichung $v'(t) = 0,5$ durch Logarithmieren nach t auflösen.

Teil 2 Aufgabe 2

Es ist $v(t) = 25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}$; $t \geqslant 0$ (t in Sekunden seit dem Start, $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$).

2.1 Um das Schaubild von v zu zeichnen, erstellt man eine Wertetabelle:

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$v(t)$	0	6,9	11,9	15,5	18,1	20,0	21,4	22,4	23,1	23,6	24,0



Für $t \to \infty$ geht e^{-t} gegen Null und damit geht auch $25 \cdot e^{-0{,}322 \cdot t}$ gegen Null.
Somit geht $v(t)$ für $t \to \infty$ gegen 25.
Die Geschwindigkeit der Drohne nähert sich $25\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ an.
Die Geschwindigkeit in Kilometer pro Stunde erhält man, indem man mit 3600 erweitert:

$$v = 25\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 25\,\frac{3600\text{m}}{3600\text{s}} = \frac{90\,000\,\text{m}}{\text{h}} = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

Die Geschwindigkeit der Drohne nähert sich nach diesem Modell $90\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ an.

2.2 Das Integral $\int_0^{50} v(t)\,\mathrm{d}t$ berechnet man mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung:

$$\begin{aligned}
\int_0^{50} v(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{50} \left(25 - 25 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}\right) \mathrm{d}t \\
&= \left[25t - \frac{25}{-0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}\right]_0^{50} \\
&= \left[25t + \frac{25}{0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}\right]_0^{50} \\
&= 25 \cdot 50 + \frac{25}{0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322 \cdot 50} - \left(25 \cdot 0 + \frac{25}{0{,}0322} \cdot e^{-0{,}0322 \cdot 0}\right) \\
&\approx 628{,}79
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Integrals berechnet man den von der Drohne in den ersten 50 Sekunden zurückgelegten Weg.
Die Drohne legt also in den ersten 50 Sekunden einen Weg von etwa 629 m zurück.

2.3 Die momentane Änderungsrate der Geschwindigkeit (Beschleunigung) erhält man mit Hilfe der ersten Ableitung von v, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$v'(t) = 0 - 25 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t} \cdot (-0{,}0322) = 0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}$$

Um zu begründen, dass die Drohne beim Start die größte Beschleunigung hat, kann man sich überlegen, dass die Funktion e^{-t} und damit auch $v'(t) = 0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}$ streng monoton fallend ist.
Alternativ kann man auch die zweite Ableitung von v betrachten, die man auch mit der Kettenregel bestimmt:

$$v''(t) = 0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t} \cdot (-0{,}0322) = -0{,}025921 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t}$$

Wegen $v''(t) < 0$ ist $v'(t)$ streng monoton fallend.
Somit hat $v'(t)$ bei $t = 0$ ihren größten Wert und die Beschleunigung ist zu Beginn am größten.

Den Zeitpunkt, ab dem die Beschleunigung geringer als $0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist, erhält man, indem man die Gleichung $v'(t) = 0{,}5$ durch Logarithmieren nach t auflöst:

$$\begin{aligned}
v'(t) &= 0{,}5 \\
0{,}805 \cdot e^{-0{,}0322 \cdot t} &= 0{,}5 \\
e^{-0{,}0322 \cdot t} &= \frac{0{,}5}{0{,}805} \\
-0{,}0322 \cdot t &= \ln\left(\frac{0{,}5}{0{,}805}\right) \\
t &= \frac{\ln\left(\frac{0{,}5}{0{,}805}\right)}{-0{,}0322} \\
t &\approx 14{,}79
\end{aligned}$$

Somit ist nach etwa 15 Sekunden die Beschleunigung geringer als $0{,}5\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.