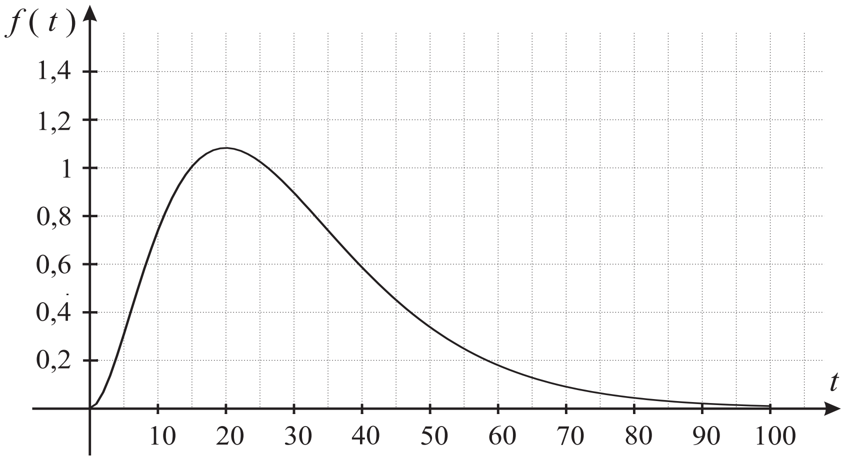
Notiz-Rand

1. Aufgabe

- Anwendungsbezogene Aufgabe
- Funktionsgraph interpretieren
- Stammfunktion
- Integral

Durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ wird das Wachstum einer Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Jahren) beschrieben. Dabei gibt $f(t)$ nicht die Höhe, sondern die Wachstumsgeschwindigkeit in Metern pro Jahr (zum Zeitpunkt t) an. Der Graph von f ist durch folgende Abbildung gegeben:



Zum Zeitpunkt $t = 0$ hat eine frisch eingepflanzte Fichte eine Höhe von ca. 20 cm.

a) Berechnen Sie den Funktionswert von f an der Stelle $t = 30$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
Beschreiben Sie anhand des Graphen von f, wie sich die Fichte im Laufe der Jahre entwickelt.

b) Begründen Sie anhand des Graphen von f, dass die Fichte nach 20 Jahren weniger als 20 Meter hoch ist.

c) Zeigen Sie, dass durch $\mathrm{F}(t) = -0{,}2 \cdot \left(t^2 + 20t + 200\right) \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ eine Stammfunktion von f gegeben ist.
Berechnen Sie die zu erwartende Höhe der Fichte nach 20 Jahren.

Notiz-Rand

a) Zur Berechung des gesuchten Funktionswerts setzen Sie $t = 30$ in $f(t)$ ein. Beachten Sie bei der Interpretation, dass $f(t)$ die momentane Wachstumsgeschwindigkeit in Abhängig-keit von der Zeit beschreibt. Erwähnen Sie bei der Beschreibung des Graphen und der Entwicklung der Fichte, in welchen Bereichen f steigt bzw. fällt, in welchen Größenord-nungen sich die Funktionswerte bewegen sowie das Verhalten für große t-Werte und was dies für die Fichte bedeutet.

b) Entnehmen Sie dem Graphen von f das größte Wachstum innerhalb der ersten 10 Jahre und im Zeitraum vom 10. bis zum 20. Jahr. Schätzen Sie mit diesen Werten die maximale Höhe, die nach 20 Jahren erreicht sein könnte, ab.

c) Leiten Sie $\mathrm{F}(t)$ ab und zeigen Sie, dass $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ ist. Die zu erwartende Höhe der Fichte nach 20 Jahren berechnen Sie mithilfe des Integrals von $f(t)$ mit den Integrationsgrenzen 0 und 20 unter Berücksichtigung der Anfangshöhe der Fichte.

Notiz-Rand

a) Setzt man $t = 30$ in $f(t) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$ ein, erhält man:

$$f(30) = 0{,}02 \cdot 30^2 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 30} \approx 0{,}896$$

Da die Funktion f die (momentane) Wachstumsgeschwindigkeit der Fichte in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Jahren) beschreibt, gibt $f(30)$ die Geschwindigkeit des Wachstums der Fichte 30 Jahre nach der Pflanzung an. Sie beträgt zu diesem Zeitpunkt also etwa $0{,}9$ Meter pro Jahr. Tatsächlich wird sie jedoch im folgenden Jahr nicht so stark wachsen, da die Wachstumsgeschwindigkeit im Intervall $[30;31]$ abnimmt.

Die Funktionswerte des Graphen von f steigen von $t = 0$ bis $t \approx 20$ monoton, d.h. die Wachstumsgeschwindigkeit der Fichte nimmt im Laufe der ersten 20 Jahre zu, bis sie ihren größten Wert (ca. 1,1 Meter pro Jahr) erreicht. Für $t > 20$ werden die Funktionswerte wieder kleiner und gehen schließlich gegen Null, d.h. ab dem 20. Jahr wächst die Fichte wieder langsamer bis sie schließlich kaum noch wächst.

b) Dem Graphen von f entnimmt man, dass die Wachstumsgeschwindigkeit in den ersten 10 Jahren unter $0{,}8$ Metern pro Jahr bleibt und im Zeitraum vom 10. bis zum 20. Jahr nicht über $1{,}1$ Meter pro Jahr steigt. Daraus folgt, dass die Fichte nach 20 Jahren auf keinen Fall um mehr als $10 \cdot 0{,}8 + 10 \cdot 1{,}1 = 19$ Meter gewachsen ist. Da sie zu Beginn $0{,}2$ Meter groß ist, ist sie nach 20 Jahren weniger als 20 Meter hoch.

c) Die Funktion $\mathrm{F}(t)$ ist eine Stammfunktion von $f(t)$, wenn gilt: $\mathrm{F}'(t) = f(t)$. Die 1. Ableitung von F bestimmt man mithilfe der Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}'(t) &= -0{,}2 \cdot \left((2t+20) \cdot e^{-0{,}1t} + (t^2+20t+200) \cdot e^{-0{,}1t} \cdot (-0{,}1)\right) \\
&= -0{,}2 \cdot \left((2t+20-0{,}1t^2-2t-20) \cdot e^{-0{,}1t}\right) \\
&= -0{,}2 \cdot \left((-0{,}1t^2) \cdot e^{-0{,}1t}\right) = 0{,}02t^2 \cdot e^{-0{,}1t} \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

Wegen $\mathrm{F}'(t) = f(t)$ ist F eine Stammfunktion von f.

Die zu erwartende Höhe h der Fichte nach 20 Jahren berechnet man mithilfe des Integrals von $f(t)$ über dem Intervall $[0;20]$, unter Berücksichtigung ihrer Anfangshöhe:

$$\begin{aligned}
h &= 0{,}2 + \int_0^{20} f(t)dt \\
&= 0{,}2 + \Big[\mathrm{F}(t)\Big]_0^{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0{,}2 + \left(-0{,}2 \cdot (20^2+20 \cdot 20+200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 20}\right) - \left(-0{,}2 \cdot (0^2+20 \cdot 0+200) \cdot e^{-0{,}1 \cdot 0}\right) \\
&\approx 13{,}13
\end{aligned}$$

Nach 20 Jahren hat die Fichte eine Höhe von etwa $13{,}13\,\mathrm{m}$ erreicht.