**Teil 4 mit Hilfsmitteln**

**Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)**

1. Gegeben ist der Würfel ABCDEFGH mit den Eckpunkten

$$\mathrm{A}\,(6 \mid -6 \mid -6),\ \mathrm{B}\,(6 \mid 6 \mid -6),\ \mathrm{D}\,(-6 \mid -6 \mid -6) \text{ und } \mathrm{E}\,(6 \mid -6 \mid 6),$$

dessen Kanten parall zu den Koordinatenachsen verlaufen.
Die Gerade $g$ verläuft durch die Punkte $\mathrm{P}\,(3 \mid -2 \mid -1)$ und $\mathrm{Q}\,(-9 \mid 6 \mid 3)$.

1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der übrigen Eckpunkte des Würfels und zeichnen Sie den Würfel in ein Koordinatensystem.
Begründen Sie, dass einer der Punkte P und Q innerhalb, der andere außerhalb des Würfels liegt.

1.2 Die Gerade $g$ schneidet die Würfelfläche DCGH im Punkt S. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes S sowie den Schnittwinkel.

1.3 Untersuchen Sie, ob der Mittelpunkt der Diagonalen $\overline{\mathrm{EC}}$ auf der Geraden $g$ liegt.

## Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C mit Hilfe einer Vektorkette. Die übrigen Eckpunkte erhalten Sie durch Symmetrie-Überlegungen.
Vergleichen Sie die einzelnen Koordinaten der Punkte P und Q mit den Koordinaten der Eckpunkte des Würfels.

1.2 Stellen Sie zuerst eine Geradengleichung der Gerade $g$ durch die Punkte P und Q auf. Bestimmen Sie dann eine Ebenengleichung der Ebene E, in der die Punkte D, C und H liegen. Bestimmen Sie hierzu einen Normalenvektor $\vec{n}$ und verwenden Sie die Normalenform $\left(\vec{x}-\vec{d}\right)\cdot\vec{n}=0$, um die Koordinatengleichung zu erhalten. Sie erhalten den Schnittpunkt S, indem Sie einen «allgemeinen Punkt» der Geraden $g$ in die Koordinatenform von E einsetzen. Den Schnittwinkel $\varphi$ erhalten Sie mit der Formel $\sin(\varphi)=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}$, wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor von E und $\vec{u}$ der Richtungsvektor von $g$ ist.

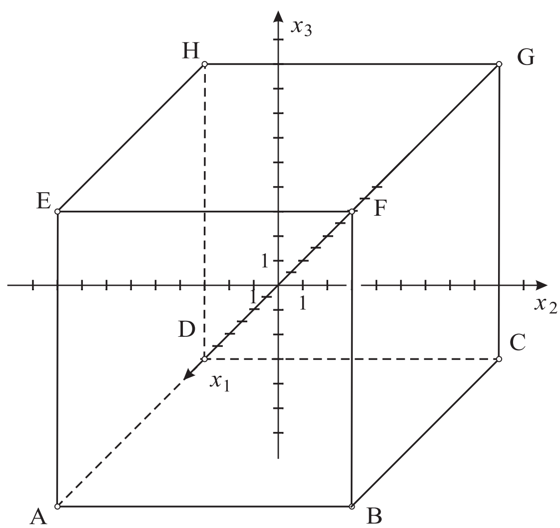
1.3 Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts M von $\overline{\mathrm{EC}}$ mit der Mittelpunktsformel $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$ und führen Sie eine Punktprobe durch, indem Sie den Ortsvektor von M in die Gleichung von $g$ einsetzen. Lösen Sie das Gleichungssystem.

## Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1.1 Zuerst werden die Koordinaten des Punktes C mit Hilfe einer Vektorkette bestimmt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AD} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt C hat also die Koordinaten $C(-6 \mid 6 \mid -6)$.
Da die Eckpunkte E, F, G und H jeweils 12 LE oberhalb der Punkte A, B, C und D liegen, haben die übrigen Eckpunkte folgende Koordinaten:
$F(6 \mid 6 \mid 6)$ , $G(-6 \mid 6 \mid 6)$ und $H(-6 \mid -6 \mid 6)$.
Damit kann man den Würfel zeichnen:




Um zu prüfen, welcher der Punkte P und Q innerhalb bzw. außerhalb des Würfels liegt, vergleicht man die jeweiligen Koordinaten der Punkte mit den Koordinaten der Eckpunkte des Würfels.
Für alle Koordinaten des Punktes P gilt, dass sie größer als $-6$ und kleiner als 6 sind. Damit muss der Punkt P im Inneren des Würfels liegen.
Beim Punkt Q ist der Wert der $x_1$-Koordinate $-9$ und damit kleiner als $-6$. Also muss der Punkt Q außerhalb des Würfels liegen.

1.2 Die Gerade durch die Punkte P und Q hat die Gleichung

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

bzw. nach «Verkürzung» des Richtungsvektors:

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$$

Um eine Koordinatengleichung der Ebene aufzustellen, in der die Würfelfläche DCGH liegt, verwendet man die Normalenform der Ebene.

Der Vektor $\overrightarrow{AD}$ ist ein Normalenvektor der gesuchten Ebene. Damit ist auch $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von E. Setzt man $\vec{n}$ und den Ortsvektor des Punktes D in die Normalenform ein, erhält man:

$$\begin{aligned} \text{E}\colon \left(\vec{x} - \vec{d}\right) \cdot \vec{n} &= 0 \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= 0 \\ (x_1+6) \cdot 1 + (x_2+6) \cdot 0 + (x_3+6) \cdot 0 &= 0 \\ x_1 + 6 &= 0 \\ x_1 &= -6 \end{aligned}$$

Die Ebene E hat die Gleichung $x_1 = -6$.
Man schneidet die Gerade $g$ und die Ebene E, indem man die Gerade als «allgemeinen Punkt» $\text{P}_r\,(3-3r \mid 2r-2 \mid r-1)$ schreibt und in die Ebenengleichung einsetzt:

$$3 - 3r = -6 \;\Rightarrow\; r = 3$$

Setzt man $r = 3$ in $\text{P}_r$ ein, ergibt sich $\text{P}_3\,(3-3\cdot 3 \mid 2\cdot 3-2 \mid 3-1)$ und damit der Schnittpunkt $\text{S}\,(-6 \mid 4 \mid 2)$.

Der Schnittpunkt der Geraden $g$ und der Ebene E hat die Koordinaten $\text{S}\,(-6 \mid 4 \mid 2)$.
Den Schnittwinkel $\varphi$ von E und $g$ erhält man mit der Formel $\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|}$, wobei $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ der Normalenvektor von E und $\vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Richtungsvektor von $g$ ist.

Damit ergibt sich:

$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{u}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1\cdot(-3)+0\cdot 2+0\cdot 1|}{\sqrt{1^2+0^2+0^2}\cdot\sqrt{(-3)^2+2^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$

$$\Rightarrow\ \varphi \approx 53{,}3^\circ$$

Der Schnittwinkel beträgt etwa $53{,}3^\circ$.

1.3 Der Mittelpunkt M von $\overline{\mathrm{EC}}$ wird mit Hilfe einer Vektorkette bestimmt:

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6\\6\\-6\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Es ist also zu prüfen, ob $\mathrm{M}(0 \mid 0 \mid 0)$ auf der Geraden liegt. Hierzu macht man eine Punktprobe und setzt den Ortsvektor von M in die Geradengleichung ein:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\1\end{pmatrix}$$

Man erhält das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -3 &= -3r \\ 2 &= 2r \\ 1 &= r \end{aligned}$$

Für jede Zeile ergibt sich $r = 1$.
Damit ist gezeigt, dass der Mittelpunkt von $\overline{\mathrm{EC}}$ auf der Geraden $g$ liegt.