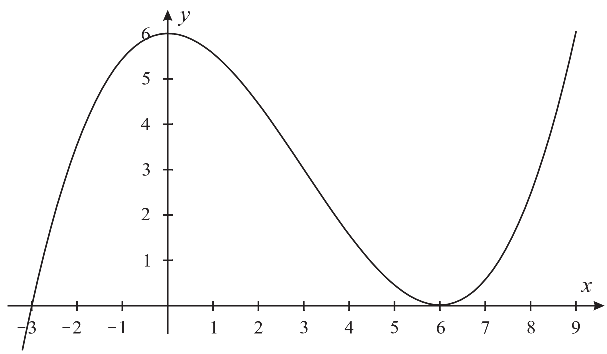
Abitur 2018 Teil 2 mit Hilfsmitteln

Aufgabe 1 Analysis

1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\,;\ x \in \mathbb{R}$.
Die folgende Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Schaubilds K von f.



1.1.1 Bestimmen Sie die reellen Werte von a, b und c, sodass gilt: 3
$f(x) = a \cdot (x-b) \cdot (x-c)^2\,;\ x \in \mathbb{R}$.

1.1.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes von K und zeigen Sie, dass dieser auf der ersten Winkelhalbierenden liegt. 4

1.1.3 Das Schaubild K schließt mit der x-Achse eine Fläche A ein, die von der y-Achse in zwei Flächen unterteilt wird. Bestimmen Sie den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche am Inhalt von A. 3

1.1.4 Geben Sie jeweils die Gleichung einer Geraden durch den Punkt $(0\,|\,6)$ an, die mit K 6
(1) genau einen Punkt
(2) genau drei Punkte
gemeinsam hat.
Die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ soll mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben. Bestimmen Sie die beiden Werte für die Steigung m.

1.2 Die Funktion g ist gegeben durch 3
$\int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Gabi behauptet, dass die erste Ableitung der Funktion g wie folgt lautet:
$g'(x) = \sin\left(2x^2+2\right) - \sin(2)$. Beurteilen Sie diese Behauptung.

20

Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen des Schaubilds K von f und beachten Sie, dass es eine einfache und eine doppelte Nullstelle gibt. Damit erhalten Sie mit Hilfe des Nullstellenansatzes b und c. Setzen Sie diese sowie die Koordinaten des Schnittpunktes P von K mit der y-Achse in den gegebenen Ansatz ein, stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese nach a auf.

1.1.2 Die Koordinaten des Wendepunkts von K erhalten Sie mit der 2. und 3. Ableitung von f. Als notwendige Bedingung lösen Sie die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf. Prüfen Sie, ob $f'''(x) \neq 0$ ist, so dass es sich um eine Wendestelle handelt.
Den zugehörigen y-Wert erhalten Sie, indem Sie den x-Wert in $f(x)$ einsetzen. Beachten Sie, dass ein Punkt auf der ersten Winkelhalbierenden liegt, wenn der x- und der y-Wert übereinstimmen.

1.1.3 Bestimmen Sie den Flächeninhalt A der Fläche, den das Schaubild K mit der x-Achse einschließt, mit Hilfe eines Integrals und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist. Den Flächeninhalt A_1 der kleineren Fläche berechnen Sie ebenfalls mit Hilfe eines Integrals. Den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche A_1 am Inhalt von A erhalten Sie, indem Sie A_1 durch A teilen.

1.1.4 Als Ansatz verwenden Sie $y = m \cdot x + 6$, da die Gerade durch den Punkt $(0 \mid 6)$ geht. Überlegen Sie, welche Steigung die Geraden jeweils haben können, damit sie mit K genau einen Punkt oder drei Punkte gemeinsam haben. Bestimmen Sie dazu gegebenenfalls einen weiteren Punkt.
Beachten Sie, dass die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $(0 \mid 6)$ K in genau zwei Punkten schneidet, so dass Sie m_1 erhalten.
Die gemeinsamen Punkte der Geraden mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ und K erhalten Sie durch Gleichsetzen. Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt und der abc-Formel. Beachten Sie, dass es eine weitere Lösung gibt, wenn der Term unter der Wurzel Null ergibt. Stellen Sie eine Gleichung auf und lösen Sie diese nach m auf.

1.2 Um $g(x)$ integralfrei zu bestimmen, verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{F}(x)\Big]_a^b = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$. Die erste Ableitung der Funktion $g(x)$ erhalten Sie mit Hilfe der Kettenregel («äußere mal innere Ableitung»). Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit der Behauptung.

Teil 2 Aufgabe 1

Es ist $f(x) = \frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6$; $x \in \mathbb{R}$ mit Schaubild K.

1.1.1 Das Schaubild K von f hat die Nullstellen $x_1 = -3$ (einfache Nullstelle) und $x_2 = 6$ (doppelte Nullstelle).
Damit ergibt sich mit Hilfe des Nullstellenansatzes:

$$f(x) = a \cdot (x - (-3)) \cdot (x-6)^2 = a \cdot (x+3) \cdot (x-6)^2$$

Somit erhält man: $b = -3$ und $c = 6$.
Da K durch den Punkt $\mathrm{P}(0 \mid 6)$ geht, kann man die Koordinaten von P in $f(x)$ einsetzen (Punktprobe):

$$6 = a \cdot (0+3) \cdot (0-6)^2 \Leftrightarrow 6 = a \cdot 3 \cdot 36 \Rightarrow a = \frac{1}{18}$$

1.1.2 Die Koordinaten des Wendepunkts von K erhält man mit der 2. und 3. Ableitung von f:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{6}x^2 - x \\ f''(x) &= \frac{1}{3}x - 1 \\ f'''(x) &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Als notwendige Bedingung löst man die Gleichung $f''(x) = 0$ nach x auf:

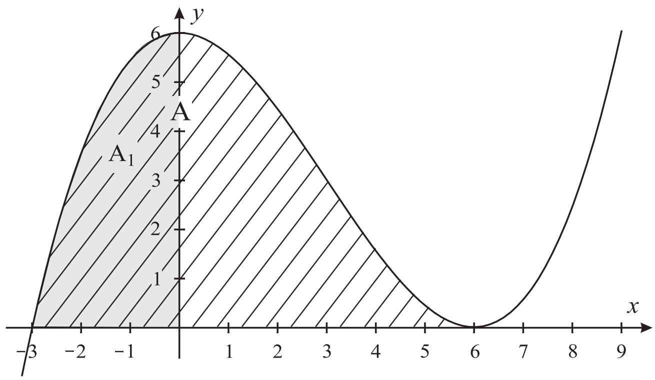
$$\frac{1}{3}x - 1 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Wegen $f'''(x) = \frac{1}{3} \neq 0$ handelt es sich um eine Wendestelle.
Den zugehörigen y-Wert erhält man, indem man den x-Wert in $f(x)$ einsetzt:

$$y = f(3) = \frac{1}{18} \cdot 3^3 - \frac{1}{2} \cdot 3^2 + 6 = 3$$

Somit hat der Wendepunkt die Koordinaten $\mathrm{W}(3 \mid 3)$.
Da der x- und der y-Wert von W übereinstimmen, liegt W auf der ersten Winkelhalbierenden.

1.1.3



Den Flächeninhalt A der Fläche, den das Schaubild K mit der x-Achse einschließt, erhält man mit Hilfe eines Integrals:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_{-3}^{6} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{6} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{6} \\
&= \frac{1}{72}\cdot 6^4 - \frac{1}{6}\cdot 6^3 + 6\cdot 6 - \left(\frac{1}{72}\cdot(-3)^4 - \frac{1}{6}\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)\right) \\
&= \frac{243}{8}
\end{aligned}
$$

Den Flächeninhalt A_1 der kleineren Fläche erhält man ebenfalls mit Hilfe eines Integrals:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A}_1 &= \int_{-3}^{0} f(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-3}^{0} \left(\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{72}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 6x\right]_{-3}^{0} \\
&= \frac{1}{72}\cdot 0^4 - \frac{1}{6}\cdot 0^3 + 6\cdot 0 - \left(\frac{1}{72}\cdot(-3)^4 - \frac{1}{6}\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)\right) \\
&= \frac{99}{8}
\end{aligned}
$$

Den prozentualen Anteil des Inhalts der kleineren Fläche A_1 am Inhalt von A erhält man, indem man A_1 durch A teilt:

$$\frac{\mathrm{A}_1}{\mathrm{A}} = \frac{\frac{99}{8}}{\frac{243}{8}} = \frac{11}{27} \approx 0,41 = 41\%$$

Der prozentuale Anteil beträgt etwa 41 %.

1.1.4 (1) Eine Gerade, die mit K genau einen Punkt gemeinsam hat und durch den Punkt $(0 \mid 6)$ geht, hat z.B. die Gleichung $x = 0$ (y-Achse), oder auch $y = -3x + 6$.

(2) Eine Gerade, die mit K genau drei Punkte gemeinsam hat und durch den Punkt $(0 \mid 6)$ geht, geht beispielsweise noch durch den Punkt N$(6 \mid 0)$ und W$(3 \mid 3)$. Sie hat damit die Steigung $m = -1$ und somit lautet die Gleichung: $y = -x + 6$.

Anhand des Schaubilds kann man erkennen, dass die Parallele zur x-Achse durch den Punkt $(0 \mid 6)$, also die Gerade mit der Gleichung $y = 6$, K in genau zwei Punkten schneidet. Damit erhält man als erste Lösung die Steigung $m_1 = 0$.
Die weitere Steigung, für die die Gerade zwei Schnittpunkte mit K hat, erhält man, indem man die gemeinsamen Punkte der Geraden mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ und K durch Gleichsetzen bestimmt:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 6 &= m \cdot x + 6 \\
\frac{1}{18}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - m \cdot x &= 0 \\
x \cdot \left(\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - m\right) &= 0
\end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt erhält man $x_1 = 0$ und aus $\frac{1}{18}x^2 - \frac{1}{2} \cdot x - m = 0$ bzw. $x^2 - 9x - 18m = 0$ ergibt sich mit Hilfe der *abc*-Formel:

$$x_{2,3} = \frac{9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18m)}}{2 \cdot 1}$$

Wenn die Gerade mit K genau zwei gemeinsame Punkte haben soll, darf es neben $x_1 = 0$ nur noch eine weitere Lösung geben. Daher muss der Term unter der Wurzel Null ergeben:

$$9^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-18m) = 0 \ \Leftrightarrow \ 81 + 72m = 0 \ \Rightarrow \ m_2 = -\frac{9}{8}$$

Somit hat die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x + 6$ mit K für $m_1 = 0$ und $m_2 = -\frac{9}{8}$ genau zwei Punkte gemeinsam.

1.2 Es ist $g(x) = \int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,\mathrm{d}t$ mit $x \in \mathbb{R}$.
Mit Hilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung erhält man:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \int_1^{x^2+1} \sin(2t)\,\mathrm{d}t \\
&= \left[\frac{1}{2} \cdot (-\cos(2t))\right]_1^{x^2+1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2t\right)\right]_{1}^{x^2+1}\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\cdot\left(x^2+1\right)\right)-\left(-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\cdot 1\right)\right)\\
&= -\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2x^2+2\right)+\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\right)
\end{aligned}
$$

Die erste Ableitung der Funktion $g(x)=-\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2x^2+2\right)+\frac{1}{2}\cdot\cos\left(2\right)$ erhält man mit Hilfe der Kettenregel:

$$g'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\sin\left(2x^2+2\right)\right)\cdot 4x=2x\cdot\sin\left(2x^2+2\right)$$

Wegen $g'(x)=2x\cdot\sin\left(2x^2+2\right)\neq\sin\left(2x^2+2\right)-\sin(2)$ ist die Behauptung falsch.