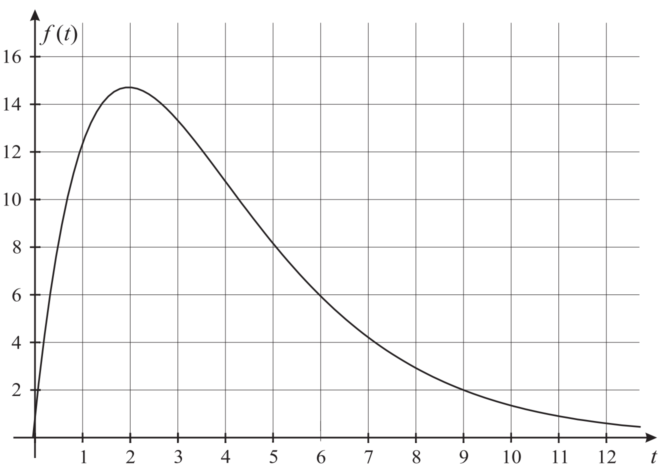
Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 3
(Wahlaufgabe 2 von 3)

3. Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen. Die folgende Abbildung zeigt den Graph von f für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments:



3.1 Das Medikament ist nur wirksam, wenn seine Konzentration im Blut mindestens $4\,\frac{mg}{l}$ beträgt.
Bestimmen Sie näherungsweise die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist.

3.2 Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun näherungsweise durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 4$ beschrieben.
Bestimmen Sie graphisch den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.

3.3 Das Medikament wird nun in seiner Zusammensetzung verändert.
Die Konzentration des Medikaments im Blut wird durch
$g(t) = at \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben.
Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $g(t)$ in $\frac{mg}{l}$ gemessen.
Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$ erreicht.

Teil 2 Aufgabe 3

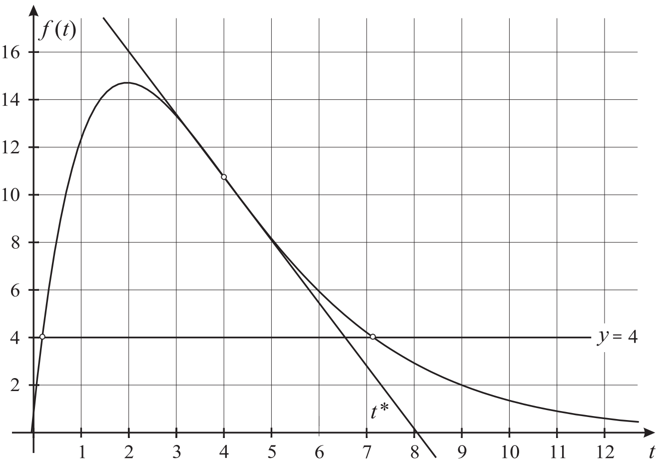
3.1 Zur Bestimmung der wirksamen Zeitspanne schneiden Sie das Schaubild von f mit der Geraden $y = 4$. Geben Sie näherungsweise die beiden Schnittstellen an und berechnen Sie deren Differenz.

3.2 Zeichnen Sie die Tangente t^* bei $t = 4$ an das Schaubild von f und schneiden Sie die Tangente mit der x-Achse.

3.3 Stellen Sie mit Hilfe von $g(t)$ und deren Ableitung sowie den gegebenen Daten zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten auf und lösen Sie diese; beachten Sie, dass das Maximum gegeben ist.

Teil 2 Aufgabe 3

3.1 Es ist $f(t) = 20t \cdot e^{-0{,}5t};\ 0 \leqslant t \leqslant 12$.



Schneidet man das Schaubild von f mit der Geraden $y = 4$, so erhält man näherungsweise die Schnittstellen $t_1 \approx 0{,}2$ und $t_2 \approx 7{,}1$. Damit ist $t_2 - t_1 = 7{,}1 - 0{,}2 = 6{,}9$.
Somit beträgt die Zeitspanne, in der das Medikament wirksam ist, etwa 7 Stunden.

3.2 Zeichnet man die Tangente t^* bei $t = 4$ an das Schaubild von f und schneidet man die Tangente t^* mit der x-Achse, so erhält man näherungsweise $t = 8$.
Somit ist das Medikament etwa 8 Stunden nach der Einnahme vollständig abgebaut.

3.3 Es ist $g(t) = at \cdot e^{-bt};\ a > 0,\ b > 0$.
Da der größte Wert der Konzentration $g(t)$ angegeben ist, verwendet man die 1. Ableitung von $g(t)$. Diese erhält man mit der Produkt- und Kettenregel:

$$g'(t) = a \cdot e^{-bt} + ate^{-bt} \cdot (-b) = (a - abt) \cdot e^{-bt}$$

Da die Konzentration $g(t)$ nach 4 Stunden ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$ annimmt, gelten folgende Bedingungen:

$$\begin{array}{llclcrcl} \text{I} & g(4) & = & 10 & \Rightarrow & 4a \cdot e^{-4b} & = & 10 \\ \text{II} & g'(4) & = & 0 & \Rightarrow & (a - 4ab) \cdot e^{-4b} & = & 0 \end{array}$$

Löst man Gleichung II, so ergibt sich wegen $a > 0$:

$$\begin{aligned} a - 4ab &= 0 \\ a \cdot (1 - 4b) &= 0 \\ 1 - 4b &= 0 \\ 1 &= 4b \\ b &= 0{,}25 \end{aligned}$$

Setzt man $b = 0,25$ in Gleichung I ein, so ergibt sich:

$$4a \cdot e^{-4 \cdot 0,25} = 10 \;\Rightarrow\; a = 2,5e$$

Die Konzentration erreicht 4 Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert $10\,\frac{mg}{l}$, wenn die Konstanten $a = 2,5e$ und $b = 0,25$ für die neue Zusammensetzung gewählt werden.