Abitur 2019 Teil 4 mit Hilfsmitteln

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

(AG, BTG, EG, SGG, WG)

1 In den Skigebieten A, B und C verbringen jährlich immer die gleichen 200 000 Gäste ihren Skiurlaub. Die Übergangstabelle bzw. die Übergangsmatrix M legen modellhaft die Veränderung der Gästeverteilung auf die drei Skigebiete von einem zum nächsten Jahr fest.

zu \ von	A	B	C
A	0,9	0,15	0,2
B	0,06	0,8	0,2
C	0,04	0,05	0,6

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

1.1 Geben Sie ein Übergangsdiagramm an und interpretieren Sie den Wert $0{,}04$ in M. 4

1.2 In A verbringen 60%, in B 30% und in C 10% der Gäste ihren Skiurlaub. 4
Ermitteln Sie für das folgende Jahr die jeweilige Anzahl der Gäste.
Bestimmen Sie das Skigebiet, in dem der größte prozentuale Unterschied entsteht.

1.3 In einer Simulation wird angenommen, dass im Jahr 2020 die Anzahl der Gäste in A mit der Summe der Anzahl der Gäste in B und C übereinstimmt. Man geht zudem davon aus, dass im Jahr 2021 in B genau 63 500 Gäste ihren Skiurlaub verbringen werden. 4
Bestimmen Sie die Anzahl der Gäste von Skigebiet A, B und C im Jahr 2020.

1.4 Berechnen Sie die prozentuale Gästeverteilung, die von Jahr zu Jahr gleich bleibt. 3

15

Teil 4 Lineare Algebra: Matrizen

1.1 Zeichnen Sie anhand der gegebenen Tabelle das Übergangsdiagramm für die Veränderung der Gästeverteilung. Beachten Sie, dass der Wert $0{,}04$ in der Tabelle und in M das Wechselverhalten von A zu C angibt.

1.2 Bestimmen Sie den Zustandsvektor $\vec{x}$ für die Verteilung der Gäste auf die Skigebiete. Dabei gibt die erste Zeile die Anzahl der Gäste des Skigebiets A, die zweite Zeile die Anzahl der Gäste des Skigebiets B und die dritte Zeile die Anzahl der Gäste des Skigebiets C an. Die jeweilige Anzahl der Gäste der Skigebiete A, B und C im folgenden Jahr erhalten Sie, indem Sie die Matrix M mit dem Zustandsvektor $\vec{x}$ multiplizieren. Um zu bestimmen, in welchem Skigebiet der größte prozentuale Unterschied besteht, teilen Sie jeweils die Differenz der Gästezahlen durch die anfänglichen Gästezahlen in jedem Skigebiet.

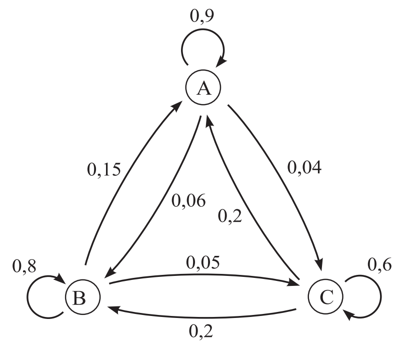
1.3 Bezeichnen Sie mit a die Anzahl der Gäste in Skigebiet A, mit b die Anzahl der Gäste in Skigebiet B und mit c die Anzahl der Gäste in Skigebiet C im Jahr 2020. Bestimmen Sie damit den Zustandsvektor $\vec{x}$. Beachten Sie, dass im Jahr 2020 die Anzahl der Gäste in A mit der Summe der Anzahl der Gäste in B und C übereinstimmt und bestimmen Sie damit den Zustandsvektor $\vec{x}$ in Abhängigkeit von b und c. Die Anzahl der Gäste in B im Jahr 2021 erhalten Sie, indem Sie die Matrix M mit dem Zustandsvektor $\vec{x}$ multiplizieren. Dabei ist beim Ergebnis nur die zweite Zeile von Bedeutung. Beachten Sie, dass im Jahr 2021 in B genau $63\,500$ Gäste ihren Skiurlaub verbringen und dass insgesamt $200\,000$ Gäste vorhanden sind. Stellen Sie zwei Gleichungen auf und lösen Sie das zugehörige lineare Gleichungssystem.

1.4 Bezeichnen Sie mit a den prozentualen Anteil der Gäste in Skigebiet A, mit b den prozentualen Anteil der Gäste in Skigebiet B und mit c den prozentualen Anteil der Gäste in Skigebiet C. Bestimmen Sie c in Abhängigkeit von a und b und daraus den Verteilungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Um die prozentuale Gästeverteilung, die von Jahr zu Jahr gleich bleibt, zu berechnen, stellen Sie die Gleichung $\mathrm{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ auf und lösen das zugehörige lineare Gleichungssystem.

Teil 4 Lineare Algebra: Matrizen

1.1 Anhand der gegebenen Tabelle ergibt sich für die Veränderung der Gästeverteilung folgendes Übergangsdiagramm:.

zu \ von	A	B	C
A	0,9	0,15	0,2
B	0,06	0,8	0,2
C	0,04	0,05	0,6



Der Wert $0,04$ in der Tabelle und in $M = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix}$ gibt an, dass 4% der Gäste des Skigebiets A in das Skigebiet C wechseln.

1.2 Da in Skigebiet A 60%, in B 30% und in C 10% der 200 000 Gäste ihren Skiurlaub verbringen, gilt für den Zustandsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 120\,000 \\ 60\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix}$$

Dabei gibt die erste Zeile die Anzahl der Gäste des Skigebiets A, die zweite Zeile die Anzahl der Gäste des Skigebiets B und die dritte Zeile die Anzahl der Gäste des Skigebiets C an.

Die jeweilige Anzahl der Gäste der Skigebiete A, B und C im folgenden Jahr erhält man, indem man die Matrix M mit dem Zustandsvektor $\vec{x}$ multipliziert:

$$M \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 120\,000 \\ 60\,000 \\ 20\,000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 121\,000 \\ 59\,200 \\ 19\,800 \end{pmatrix}$$

Somit sind im folgenden Jahr in Skigebiet A 121 000 Gäste, in Skigebiet B 59 200 Gäste und in Skigebiet C 19 800 Gäste.

Um zu bestimmen, in welchem Skigebiet der größte prozentuale Unterschied besteht, teilt man jeweils die Differenz der Gästezahlen durch die anfänglichen Gästezahlen in jedem Skigebiet:

$$\frac{121\,000-120\,000}{120\,000} \approx 0{,}0083 = 0{,}83\%$$
$$\frac{59\,200-60\,000}{60\,000} \approx -0{,}013 = -1{,}3\%$$
$$\frac{19\,800-20\,000}{20\,000} = -0{,}01 = -1\%$$

Somit besteht in Skigebiet B der größte prozentuale Unterschied.

1.3 Man bezeichnet im Jahr 2020 mit a die Anzahl der Gäste in Skigebiet A, mit b die Anzahl der Gäste in Skigebiet B und mit c die Anzahl der Gäste in Skigebiet C. Damit gilt für den Zustandsvektor:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Da im Jahr 2020 die Anzahl der Gäste in A mit der Summe der Anzahl der Gäste in B und C übereinstimmt, gilt: $a = b + c$. Damit erhält man:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Die Anzahl der Gäste in B im Jahr 2021 erhält man, indem man die Matrix M mit dem Zustandsvektor $\vec{x}$ multipliziert. Dabei ist beim Ergebnis nur die zweite Zeile von Bedeutung:

$$\mathrm{M} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}15 & 0{,}2 \\ 0{,}06 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0{,}04 & 0{,}05 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b+c \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \\ 0{,}06 \cdot (b+c) + 0{,}8 \cdot b + 0{,}2 \cdot c \\ \ldots \end{pmatrix}$$

Da im Jahr 2021 in B genau 63 500 Gäste ihren Skiurlaub verbringen werden, gilt:

$$0{,}06 \cdot (b+c) + 0{,}8 \cdot b + 0{,}2 \cdot c = 63\,500 \;\Rightarrow\; 0{,}86b + 0{,}26c = 63\,500$$

Da insgesamt 200 000 Gäste vorhanden sind, gilt:

$$a + b + c = 200\,000 \text{ bzw. } b + c + b + c = 200\,000 \;\Rightarrow\; 2b + 2c = 200\,000$$

Dies führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & 0{,}86b & + & 0{,}26c & = & 63\,500 \\ \mathrm{II} & 2b & + & 2c & = & 200\,000 \end{array}$$

Subtrahiert man das 0,86-fache von Gleichung II vom 2-fachen von Gleichung I, erhält man: $-1{,}2c = -45\,000 \;\Rightarrow\; c = 37\,500$

Setzt man $c = 37\,500$ in Gleichung II ein, ergibt sich:

$2b + 2 \cdot 37\,500 = 200\,000 \;\Rightarrow\; b = 62\,500$

Mit $a = b + c$ erhält man: $a = 37\,500 + 62\,500 = 100\,000$
Somit gibt es im Jahr 2020 genau 100 000 Gäste in Skigebiet A, 62 500 Gäste in Skigebiet B und 37 500 Gäste in Skigebiet C.

1.4 Bezeichnet man mit a den prozentualen Anteil der Gäste in Skigebiet A, mit b den prozentualen Anteil der Gäste in Skigebiet B und mit c prozentualen Anteil der Gäste in Skigebiet C, so gilt: $c = 1 - a - b$. Damit ergibt sich ein Verteilungsvektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 - a - b \end{pmatrix}$$

Um die prozentuale Gästeverteilung, die von Jahr zu Jahr gleich bleibt, zu berechnen, muss gelten:

$$\mathrm{M} \cdot \vec{x} = \vec{x}$$

Damit erhält man:

$$\begin{pmatrix} 0,9 & 0,15 & 0,2 \\ 0,06 & 0,8 & 0,2 \\ 0,04 & 0,05 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 - a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 - a - b \end{pmatrix}$$

Dies führt zu folgendem linearen Gleichungssystem:

$$\begin{array}{lccccccc} \mathrm{I} & 0,9a & + & 0,15b & + & 0,2 \cdot (1 - a - b) & = & a \\ \mathrm{II} & 0,06a & + & 0,8b & + & 0,2 \cdot (1 - a - b) & = & b \\ \mathrm{III} & 0,04a & + & 0,05b & + & 0,6 \cdot (1 - a - b) & = & 1 - a - b \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{lccccc} \mathrm{I} & -0,3a & - & 0,05b & = & -0,2 \\ \mathrm{II} & -0,14a & - & 0,4b & = & -0,2 \\ \mathrm{III} & 0,44a & + & 0,45b & = & 0,4 \end{array}$$

Subtrahiert man das 0,3-fache von Gleichung II vom 0,14-fachen von Gleichung I, ergibt sich:

$$0,113b = 0,032 \Rightarrow b = \frac{32}{113} \approx 0,283 = 28,3\%$$

Setzt man $b = \frac{32}{113}$ in Gleichung I ein, erhält man:

$$-0,3a - 0,05 \cdot \frac{32}{113} = -0,2 \Rightarrow a = \frac{70}{113} \approx 0,620 = 62\% \text{ (gerundet)}$$

Daraus folgt:

$$c = 1 - a - b = 1 - \frac{32}{113} - \frac{70}{113} = \frac{11}{113} \approx 0,097 = 9,7\%$$

Somit betragen die prozentualen Anteile der Gästeverteilung etwa 62 % für Skigebiet A, etwa 28,3% für Skigebiet B und etwa 9,7% für Skigebiet C.