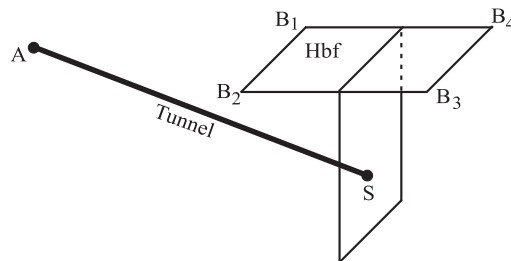


**Abitur 2019 Teil 4 mit Hilfsmitteln**

**Lineare Algebra: Vektorgeometrie (AG, BTG, EG, SGG, TG, WG)**

- 1 Die Grundfläche eines Hauptbahnhofs (Hbf) wird durch ein Viereck mit den Eckpunkten  $B_1(0 \mid 1 \mid 0)$ ,  $B_2(3 \mid 0 \mid 0)$ ,  $B_3(5 \mid 6 \mid 0)$  und  $B_4(2 \mid 7 \mid 0)$  modelliert. Ein Tunnel startet im Punkt  $A(0 \mid -11 \mid 0)$  und endet im Punkt  $S(2,5 \mid 3,5 \mid -0,5)$ . Eine Längeneinheit entspricht 100 Meter (m). Die Modellierung ist in der folgenden (nicht maßstabgetreuen) Skizze veranschaulicht.



- 1.1 Zeigen Sie, dass die Grundfläche des Hbf ein Rechteck ist. 4  
Berechnen Sie den Inhalt der Grundfläche in Quadratkilometer.
- 1.2 Der Tunnel von A nach S wird modelliert durch die Strecke  $g$  mit
- $$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}; 0 \leq r \leq 1.$$
- 1.2.1 Der Tunnel schließt mit der Ebene, in der die Grundfläche des Hbf liegt, einen Winkel ein. Berechnen Sie diesen Winkel. 2
- 1.2.2 Untersuchen Sie, ob für jeden Punkt des Tunnels der Sicherheitsabstand von mindestens 20 Meter zur Seite  $\overline{B_1B_2}$  der Grundfläche des Hbf eingehalten wird. 4
- 1.3 Eine Ebene besitzt die Darstellung  $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 13$ .
- 1.3.1 Prüfen Sie, ob der Punkt S in der Ebene E liegt. 1
- 1.3.2 Geben Sie eine Gleichung der Geraden  $k$  durch A an, die orthogonal zu E ist. 4  
Zur Planung eines weiteren Tunnels möchte man wissen, wo sich der Punkt  $A' (\neq A)$  auf  $k$  befindet, der denselben Abstand zu E hat wie der Punkt A.  
Bestimmen Sie die Koordinaten von  $A'$ .

## Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1.1 Um zu zeigen, dass die Grundfläche des Hbf ein Rechteck ist, bestimmen Sie zuerst die Verbindungsvektoren der Seiten des Vierecks; falls jeweils zwei gegenüberliegende Vektoren gleich sind, handelt es sich um ein Parallelogramm. Um nachzuweisen, dass das Parallelogramm ein Rechteck ist, berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen den Vektoren  $\overrightarrow{B_1B_2}$  und  $\overrightarrow{B_1B_4}$ . Falls das Ergebnis Null ist, ist bei  $B_1$  ein rechter Winkel. Aufgrund der Eigenschaften des Parallelogramms müssen die anderen Winkel dann auch rechte Winkel sein und es handelt sich um ein Rechteck. Den Inhalt  $G$  der Grundfläche erhalten Sie, indem Sie zuerst die Längen der Verbindungsvektoren  $\overrightarrow{B_1B_2}$  und  $\overrightarrow{B_1B_4}$  bestimmen und anschließend den Rechtecksinhalt berechnen. Beachten Sie, dass einer Längeneinheit  $100\text{m} = 0,1\text{km}$  entsprechen und bestimmen Sie, wie viel Quadratkilometer einer Flächeneinheit entsprechen.
- 1.2.1 Den Winkel  $\alpha$ , den der Tunnel mit der Ebene, in der die Grundfläche des Hbf liegt, einschließt, erhalten Sie, indem Sie den Winkel zwischen der Geraden  $g^*$  (Verlängerung der Strecke  $g$ ) und der Ebene  $x_3 = 0$  mit der Formel  $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$  berechnen, wobei  $\vec{u}$  der Richtungsvektor von  $g^*$  und  $\vec{n}$  der Normalenvektor der Ebene  $x_3 = 0$  ist.
- 1.2.2 Den Abstand  $d$  des Tunnels zur Seite  $\overline{B_1B_2}$  der Grundfläche erhalten Sie, indem Sie den Abstand der windschiefen Geraden  $g^*$  und  $h$  durch  $B_1$  und  $B_2$  berechnen. Der Abstand der windschiefen Geraden ist der Abstand des Punktes  $B_1$  zur Ebene  $F$ , in der die Gerade  $g^*$  liegt, und welche parallel zu  $h$  ist. Hierzu benötigen Sie einen Vektor  $\vec{n}$ , der senkrecht auf den beiden Richtungsvektoren  $\vec{u}_1$  und  $\vec{u}_2$  von  $g^*$  und  $h$  steht. Verwenden Sie das Vektorprodukt der beiden Vektoren. Bestimmen Sie  $d$  mit der Formel  $d = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$  für den Abstand eines Punktes zu einer Ebene und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Sicherheitsabstand. Beachten Sie, dass einer Längeneinheit  $100\text{m}$  entsprechen.
- 1.3.1 Um zu prüfen, ob der Punkt  $S$  in der Ebene  $E$  liegt, setzen Sie die Koordinaten von  $S$  in die Ebenengleichung ein. Bei einer wahren Aussage liegt  $S$  in  $E$ .
- 1.3.2 Verwenden Sie als Richtungsvektor von  $k$  den Normalenvektor  $\vec{n}$  von  $E$ . Die Koordinaten des Punktes  $A'$  auf  $k$ , der denselben Abstand zu  $E$  hat wie der Punkt  $A$ , erhalten Sie, indem Sie den Punkt  $A$  an  $E$  spiegeln. Berechnen Sie den Schnittpunkt  $L$  von  $k$  und  $E$ . Dazu setzen Sie die Koordinaten eines allgemeinen Punktes  $L_r$  von  $k$  in die Gleichung von  $E$  ein und lösen die Gleichung nach  $r$  auf. Setzen Sie den erhaltenen  $r$ -Wert in  $L_r$  ein, um  $L$  zu erhalten. Die Koordinaten von  $A'$  erhalten Sie mit Hilfe einer Vektorkette:  $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL}$ .

## Teil 4 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1.1 Um zu zeigen, dass die Grundfläche des Hbf mit den Eckpunkten  $B_1(0 | 1 | 0)$ ,  $B_2(3 | 0 | 0)$ ,  $B_3(5 | 6 | 0)$  und  $B_4(2 | 7 | 0)$  ein Rechteck ist, bestimmt man zuerst die Verbindungsvektoren der Seiten des Vierecks:

$$\overrightarrow{B_1B_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_4B_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_2B_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_1B_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wegen  $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{B_4B_3}$  und  $\overrightarrow{B_2B_3} = \overrightarrow{B_1B_4}$  ist die Grundfläche des Hbf ein Parallelogramm. Um nachzuweisen, dass das Parallelogramm ein Rechteck ist, berechnet man das Skalarprodukt zwischen den Vektoren  $\overrightarrow{B_1B_2}$  und  $\overrightarrow{B_1B_4}$ :

$$\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_4} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 6 + 0 \cdot 0 = 0$$

Wegen  $\overrightarrow{B_1B_2} \cdot \overrightarrow{B_1B_4} = 0$  ist bei  $B_1$  ein rechter Winkel. Aufgrund der Eigenschaften des Parallelogramms müssen die anderen Winkel dann auch rechte Winkel sein und es handelt sich bei der Grundfläche des Hbf um ein Rechteck.

Den Inhalt  $G$  der Grundfläche erhält man, indem man zuerst die Längen der Verbindungsvektoren  $\overrightarrow{B_1B_2}$  und  $\overrightarrow{B_1B_4}$  bestimmt:

$$|\overrightarrow{B_1B_2}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{B_1B_4}| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} = \sqrt{40}$$

Damit erhält man:

$$G = |\overrightarrow{B_1B_2}| \cdot |\overrightarrow{B_1B_4}| = \sqrt{10} \cdot \sqrt{40} = 20$$

Da einer Längeneinheit  $100\text{ m} = 0,1\text{ km}$  entspricht, entspricht einer Flächeneinheit  $(0,1\text{ km})^2 = 0,01\text{ km}^2$ .

Damit erhält man:

$$G = 20 \cdot 0,01\text{ km}^2 = 0,2\text{ km}^2$$

Somit hat die Grundfläche einen Flächeninhalt von  $0,2\text{ km}^2$ .

1.2.1 Den Winkel  $\alpha$ , den der Tunnel mit der Ebene, in der die Grundfläche des Hbf liegt, einschließt, erhält man, indem man den Winkel zwischen der Geraden  $g^*$  mit der Gleichung

$$g^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

welche die Strecke  $g$  enthält, und der Ebene  $x_3 = 0$  mit der Formel  $\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$  berechnet, wobei  $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}$  der Richtungsvektor von  $g^*$  und  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  ein Normalenvektor der Ebene  $x_3 = 0$  ist:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\left| \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{|2,5 \cdot 0 + 14,5 \cdot 0 + (-0,5) \cdot 1|}{\sqrt{2,5^2 + 14,5^2 + (-0,5)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} \\ &= \frac{0,5}{\sqrt{216,75}} \Rightarrow \alpha \approx 1,95^\circ \end{aligned}$$

Der Winkel beträgt etwa  $1,95^\circ$ .

1.2.2 Den Abstand  $d$  des Tunnels zur Seite  $\overline{B_1 B_2}$  der Grundfläche erhält man, indem man den Abstand der windschiefen Geraden  $g^*$  und  $h$  durch  $B_1$  und  $B_2$  berechnet. Dabei ist

$$g^*: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}, \text{ und } h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$$

Der Abstand der windschiefen Geraden ist der Abstand des Punktes  $B_1(0 \mid 1 \mid 0)$  zur Ebene  $F$ , in der die Gerade  $g^*$  liegt, und welche parallel zu  $h$  ist. Hierzu benötigt man einen Vektor

$\vec{n}$ , der senkrecht auf den Richtungsvektoren

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

von  $g^*$  und  $h$  steht. Mit Hilfe des Vektorprodukts erhält man:

$$\vec{u}_1 \times \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 14,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,5 \\ -46 \end{pmatrix} = -0,5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 92 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 92 \end{pmatrix}$$

Damit ergibt sich mit der Formel  $d = \left| \frac{(\vec{a}-\vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$  für den Abstand eines Punktes zu einer Ebene:

$$\begin{aligned} d &= \frac{\left| \left( \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 92 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 92 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 92 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 92 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{|0 \cdot 1 + 12 \cdot 3 + 0 \cdot 92|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 92^2}} \\ &= \frac{36}{\sqrt{8474}} \\ &\approx 0,39 \end{aligned}$$

Da eine Längeneinheit 100m entspricht, beträgt der Abstand zwischen dem Tunnel und der Seite  $\overline{B_1B_2}$  etwa 39m.

Somit wird für jeden Punkt des Tunnels der Sicherheitsabstand von mindestens 20 Meter zur Seite  $\overline{B_1B_2}$  der Grundfläche des Hbf eingehalten.

1.3.1 Um zu prüfen, ob der Punkt  $S(2,5 \mid 3,5 \mid -0,5)$  in der Ebene  $E: \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = 13$  liegt, setzt man die Koordinaten von  $S$  in die Ebenengleichung ein:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2,5 \\ 3,5 \\ -0,5 \end{pmatrix} &= 13 \\ 1 \cdot 2,5 + 3 \cdot 3,5 + 0 \cdot (-0,5) &= 13 \\ 13 &= 13 \end{aligned}$$

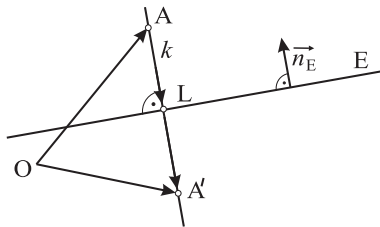
Aufgrund der wahren Aussage liegt  $S$  in  $E$ .

1.3.2 Die Gleichung der Geraden  $k$  durch  $A(0 \mid -11 \mid 0)$ , die orthogonal zu  $E$  ist, hat als Rich-

tungsvektor den Normalenvektor  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  von  $E$ :

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Punktes  $A'$  auf  $k$ , der denselben Abstand zu  $E$  hat wie der Punkt  $A$ , erhält man, indem man den Punkt  $A$  an  $E$  spiegelt.



Hierzu benötigt man den Schnittpunkt  $L$  von  $k$  und  $E$ . Dazu setzt man die Koordinaten eines allgemeinen Punktes  $L_r(r \mid -11 + 3r \mid 0)$  von  $k$  in  $E$  ein:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ -11 + 3r \\ 0 \end{pmatrix} = 13$$

$$1 \cdot r + 3 \cdot (-11 + 3r) + 0 \cdot 0 = 13$$

$$r = 4,6$$

Setzt man  $r = 4,6$  in  $L_r(r \mid -11 + 3r \mid 0)$  ein, erhält man:  $L(4,6 \mid 2,8 \mid 0)$ .

Die Koordinaten von  $A'$  erhält man mit Hilfe einer Vektorkette:

$$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AL} = \begin{pmatrix} 0 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4,6 \\ 13,8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9,2 \\ 16,6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Somit hat der Punkt  $A'$  die Koordinaten  $A'(9,2 \mid 16,6 \mid 0)$ .