Teil 2 mit Hilfsmitteln
Aufgabe 1

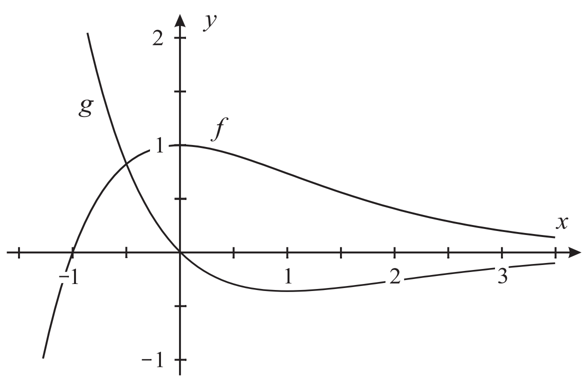
1.1 Gegeben ist die Funktion g durch $g(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2$.

1.1.1 Erläutern Sie, wie der Graph von g aus dem Graphen der Funktion $h(x) = \sin(x)$ entsteht.
Skizzieren Sie das Schaubild von g für $0 \leqslant x \leqslant 8$.

1.1.2 Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden durch den Ursprung, die parallel ist zur Normalen an das Schaubild von g im Punkt $P(4 \mid 2)$.

1.1.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche, welche der Graph von g mit der Geraden $y = 2$ im Intervall $[4;8]$ einschließt.

1.2 Gegeben sind die beiden Funktionen f und g durch $f(x) = (x+a) \cdot e^{-x}$ und $g(x) = -(x+b) \cdot e^{-x}$. Die Graphen von f und g sind in der Abbildung dargestellt:



1.2.1 Bestimmen Sie a und b.

1.2.2 Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:
(1) Der Graph der Stammfunktion von f hat bei $x = -1$ einen Wendepunkt.
(2) Der Graph der Stammfunktion von g hat im Ursprung einen Hochpunkt.
(3) Der Graph der Stammfunktion von g hat eine schiefe Asymptote.

1.2.3 Die Parallele zur y-Achse mit $x = u$, $u \geqslant 0$, schneidet den Graphen von f im Punkt $P_u\,(u \mid f(u))$ und den Graphen von g im Punkt $Q_u\,(u \mid g(u))$.
Bestimmen Sie einen Rechenausdruck für die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{P_uQ_u}$.

Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Überlegen Sie, wie das Schaubild von h in y-Richtung gestreckt und verschoben wurde und bestimmen Sie die Periode p von g durch $p = \frac{2\pi}{b}$.

1.1.2 Die Steigung der Tangente bzw. der Normalen an das Schaubild von g im Punkt P erhalten Sie mit Hilfe der 1. Ableitung von g, die Sie mit der Kettenregel bestimmen. Die Tangentensteigung m_t erhalten Sie, indem Sie den x-Wert von P in $g'(x)$ einsetzen. Die Steigung m_n der Normalen in P ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung, also $m_n = -\frac{1}{m_t}$. Da die gesuchte Gerade durch den Ursprung parallel zur Normalen in P, verwenden Sie die gleiche Steigung wie die Normalensteigung in P.

1.1.3 Den Flächeninhalt A der Fläche, welche der Graph von g mit der Geraden $y = 2$ im Intervall $[4; 8]$ einschließt, erhalten Sie mit Hilfe eines Integrals. Beachten Sie, dass die Gerade oberhalb des Graphen von g verläuft und verwenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

1.2.1 Um die Parameter a und b zu bestimmen, betrachten Sie die Nullstellen der Graphen von f bzw. g.
Stellen Sie Gleichungen auf und lösen Sie diese.

1.2.2 Beachten Sie, dass das Schaubild einer Funktion F einen Wendepunkt hat, wenn das Schaubild der 1. Ableitung von F einen Extrempunkt hat.
Beachten Sie, dass das Schaubild einer Funktion G an einer Stelle x_0 einen Hochpunkt hat, wenn das Schaubild der 1. Ableitung von G an dieser Stelle einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat.
Beachten Sie, dass das Schaubild einer Funktion G eine schiefe Asymptote hat, wenn das Schaubild der 1. Ableitung von G eine waagrechte Asymptote hat, die nicht die x-Achse ist.

1.2.3 Die Länge $d(u)$ der Strecke $\overline{\mathrm{P}_u\mathrm{Q}_u}$ erhalten Sie, indem Sie die Differenz der y-Werte der Punkte P_u und Q_u bilden.

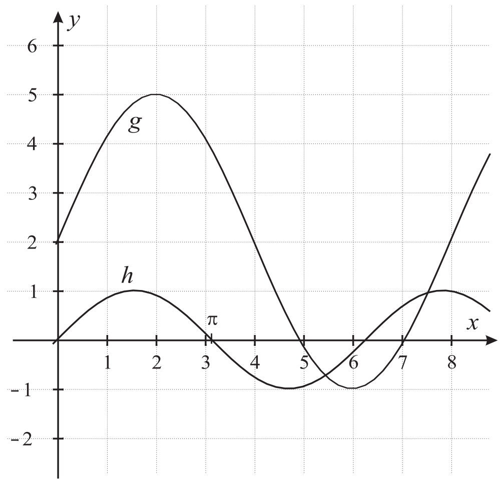
Teil 2 Aufgabe 1

1.1.1 Es ist $g(x) = 3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2$.

Man erhält das Schaubild von g aus dem Schaubild der Funktion $h(x) = \sin(x)$ folgendermaßen:

Das Schaubild von h wurde in y-Richtung mit Faktor 3 gestreckt, in y-Richtung um 2 LE nach oben verschoben und in x-Richtung mit Faktor $\frac{4}{\pi}$ gestreckt, d.h. für die Periode p von g gilt: $p = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8$.

Damit kann man das Schaubild von g für $0 \leqslant x \leqslant 8$ skizzieren:



1.1.2 Die Steigung der Tangente bzw. der Normalen an das Schaubild von g im Punkt P$(4 \mid 2)$ erhält man mit Hilfe der 1. Ableitung von g, die man mit der Kettenregel bestimmt:

$$g'(x) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$$

Die Steigung m_t der Tangente in P erhält man, indem man $x = 4$ in $g'(x)$ einsetzt:

$$m_t = g'(4) = \frac{3}{4}\pi \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right) = \frac{3}{4}\pi \cdot \cos(\pi) = \frac{3}{4}\pi \cdot (-1) = -\frac{3}{4}\pi$$

Die Steigung m_n der Normalen in P ist der negative Kehrwert der Tangentensteigung:

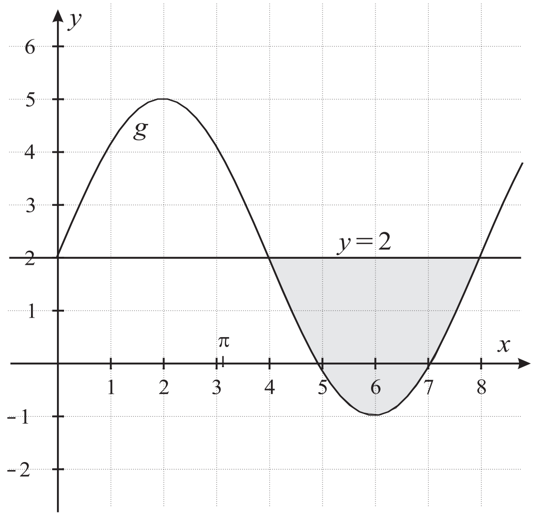
$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-\frac{3}{4}\pi} = \frac{4}{3\pi}$$

Da die gesuchte Gerade durch den Ursprung parallel zur Normalen in P verläuft, hat sie die gleiche Steigung wie die Normale in P.

Somit hat die Gerade die Gleichung:

$$y = \frac{4}{3\pi} \cdot x$$

1.1.3 Den Flächeninhalt A der Fläche, welche der Graph von g mit der Geraden $y = 2$ im Intervall $[4\,;8]$ einschließt, erhält man mit Hilfe eines Integrals:



Die Integrationsgrenzen sind $x_1 = 4$ und $x_2 = 8$. Da die Gerade $y = 2$ oberhalb des Graphen von g verläuft, gilt:

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \int_4^8 (2 - g(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_4^8 \left(2 - \left(3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) + 2\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \int_4^8 \left(-3 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)}{\frac{\pi}{4}}\right]_4^8 \\
&= \left[\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_4^8 \\
&= \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 8\right)\right) - \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} \cdot 4\right)\right) \\
&= \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos(2\pi)\right) - \left(\frac{12}{\pi} \cdot \cos(\pi)\right) \\
&= \frac{12}{\pi} - \left(-\frac{12}{\pi}\right) \\
&= \frac{24}{\pi}
\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt beträgt $\frac{24}{\pi}$ FE.

1.2.1 Um die Parameter a und b zu bestimmen, betrachtet man die Nullstellen der Graphen von f bzw. g.
Wegen $f(-1) = 0$ gilt:

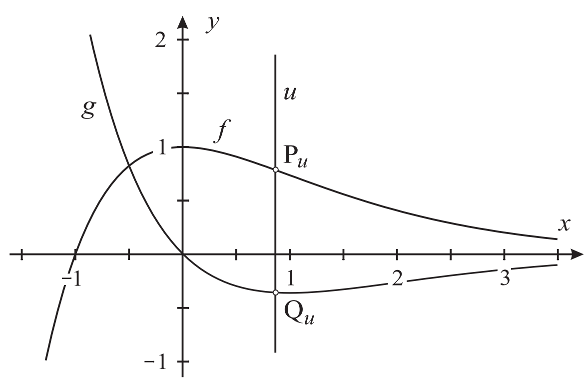
$$(-1+a) \cdot e^{-(-1)} = 0 \;\Rightarrow\; a = 1$$

Wegen $g(0) = 0$ gilt:

$$-(0+b) \cdot e^{-0} = 0 \;\Rightarrow\; b = 0$$

1.2.2 (1) Wenn der Graph der Stammfunktion F von f bei $x = -1$ einen Wendepunkt hätte, müsste der Graph der 1. Ableitung von F, also der Graph von f, einen Extrempunkt bei $x = -1$ haben. Da dies nicht der Fall ist, ist die Aussage falsch.
(2) Wenn der Graph der Stammfunktion G von g im Ursprung einen Hochpunkt hätte, müsste der Graph der 1. Ableitung von G, also der Graph von g, im Ursprung einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ haben. Da dies der Fall ist, ist die Aussage richtig.
(3) Wenn der Graph der Stammfunktion G von g eine schiefe Asymptote hätte, müsste der Graph der 1. Ableitung von G, also der Graph von g, eine waagrechte Asymptote haben, die nicht die x-Achse ist. Da dies nicht der Fall ist, ist die Aussage falsch.

1.2.3 Die Länge $d\,(u)$ der Strecke $\overline{\mathrm{P}_u\mathrm{Q}_u}$ ist gleich der Differenz der y-Werte der Punkte P_u und Q_u.



Daher berechnet man $d\,(u)$ als Differenz der Funktionswerte von f und g an der Stelle $x = u$. Da $f\,(u) > g\,(u)$ für $u \geqslant 0$ ist, folgt:

$$\begin{aligned} d(u) &= f(u) - g(u) \\ &= (u+1)e^{-u} - \left(-u \cdot e^{-u}\right) \\ &= (u+1)e^{-u} + u \cdot e^{-u} \\ &= (2u+1) \cdot e^{-u} \end{aligned}$$