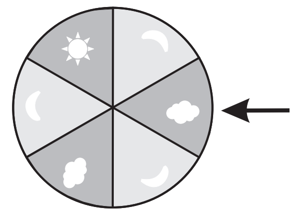
Abitur 2019 Teil 3 mit Hilfsmitteln – Stochastik Aufgabe 2

(Wahlaufgabe 2 von 2)

2 Das abgebildete Glücksrad besteht aus sechs gleich großen Sektoren. Wird das Glücksrad gedreht, so zeigt der Pfeil beim Stillstand auf genau einen Sektor.



Bei einem Fest wird folgendes Spiel angeboten: Zeigt der Pfeil auf Sonne oder Mond, dreht man ein weiteres Mal. Das Spiel endet, wenn der Pfeil auf Wolke zeigt oder der Spieler das Rad schon dreimal gedreht hat. Jeder Spieler darf das Spiel nur einmal spielen.

2.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: 4

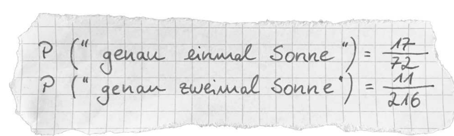
A: Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad.

B: Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond.

2.2 Ein Spiel endet mit Wolke. 4

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler dann keinmal Sonne gedreht hat.

2.3 Der Besitzer des Glücksrads nimmt vor jedem Spiel einen Euro Einsatz vom Spieler. Immer dann, wenn der Spieler Sonne dreht, bekommt er einen Euro ausgezahlt. Ansonsten geht er leer aus. Die Frau des Besitzers hat einige Wahrscheinlichkeiten richtig berechnet und auf einen Zettel geschrieben.



2.3.1 Berechnen Sie den Gewinn pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann. 4

2.3.2 Der Besitzer des Glücksrads fragt sich, wie viele Spieler genau einen Euro ausgezahlt bekommen, wenn genau 140 Spieler das Spiel spielen. 3

Die Frau des Besitzers meint, es wären mehr als 30, aber weniger als 40.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Frau des Besitzers recht hat.

15

Teil 3 Aufgabe 2

2.1 Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für Sonne (S), Mond (M) und Wolke (W) beim einmaligen Drehen. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A erhalten Sie mit Hilfe der Pfadregeln. Beachten Sie, dass bei den ersten beiden Drehungen keine Wolke angezeigt wird. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B erhalten Sie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, nämlich dass der Spieler dreimal Mond dreht. Verwenden Sie die Pfadregeln.

2.2 Bezeichnen Sie mit C das Ereignis, dass ein Spiel mit Wolke endet und mit D das Ereignis, dass keinmal Sonne angezeigt wird. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses C erhalten Sie mit Hilfe der Pfadregeln. Die Wahrscheinlichkeit $P(C \cap D)$, dass keinmal Sonne angezeigt wird und das Spiel mit Wolke endet, erhalten Sie ebenfalls mit Hilfe der Pfadregeln. Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler keinmal Sonne gedreht hat, unter der Bedingung, dass das Spiel mit Wolke endet, erhalten Sie mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit: $P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$.

2.3.1 Den Gewinn pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann, erhalten Sie, indem Sie den Erwartungswert des Gewinns des Besitzers bestimmen. Dazu multiplizieren Sie die Auszahlungsbeträge mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten und subtrahieren diese vom Einsatz. Bestimmen Sie noch die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal Sonne angezeigt wird, mit Hilfe der Pfadregeln.

2.3.2 Beachten Sie, dass die Wahrscheinlichkeit p, genau einen Euro ausgezahlt zu bekommen, angegeben ist. Legen Sie X als binomialverteilte Zufallsvariable für die Anzahl der Spieler, die genau einen Euro ausbezahlt bekommen, mit den Parametern n und p fest. Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 30 aber weniger als 40 Spieler genau einen Euro ausbezahlt bekommen, erhalten Sie mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung.

Teil 3 Aufgabe 2

2.1 Beim einmaligen Drehen ergeben sich für Sonne (S), Mond (M) und Wolke (W) folgende Wahrscheinlichkeiten:

$$P(S) = \frac{1}{6}$$
$$P(M) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$
$$P(W) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A: «Der Spieler dreht dreimal das Glücksrad.» erhält man mit Hilfe der Pfadregeln. Wenn der Spieler dreimal das Glücksrad dreht, so darf der Pfeil bei den ersten beiden Drehungen keine Wolke anzeigen. Damit gilt:

$$P(A) = P\left(\overline{W}\,\overline{W}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A beträgt $\frac{4}{9}$.

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B: «Der Spieler dreht das Glücksrad höchstens zweimal auf Mond» erhält man mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses, nämlich dass der Spieler dreimal auf Mond dreht. Mit Hilfe der Pfadregeln erhält man:

$$P(B) = 1 - P(MMM) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B beträgt $\frac{7}{8}$.

2.2 Man bezeichnet mit C das Ereignis, dass ein Spiel mit Wolke endet und mit D das Ereignis, dass keinmal Sonne angezeigt wird. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Spiel mit Wolke endet, erhält man mit Hilfe der Pfadregeln:

$$P(C) = P(W) + P\left(\overline{W}W\right) + P\left(\overline{W}\,\overline{W}W\right) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{19}{27}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass keinmal Sonne angezeigt wird und das Spiel mit Wolke endet, erhält man ebenfalls mit Hilfe der Pfadregeln:

$$P(C \cap D) = P(W) + P(MW) + P(MMW) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass der Spieler keinmal Sonne gedreht hat, unter der Bedingung, dass das Spiel mit Wolke endet, erhält man mit Hilfe der bedingten Wahrscheinlichkeit:

$$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{\frac{7}{12}}{\frac{19}{27}} = \frac{63}{76}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{63}{76}$.

2.3.1 Den Gewinn pro Spiel, den der Besitzer langfristig im Mittel erwarten kann, erhält man, indem man den Erwartungswert E des Gewinns des Besitzers bestimmt. Dazu multipliziert man die Auszahlungsbeträge mit den entsprechenden Wahrscheinlichkeiten subtrahiert diese vom Einsatz.

Die Wahrscheinlichkeit, dass dreimal Sonne angezeigt wird, erhält man mit den Pfadregeln:

$$\mathrm{P}(\text{"dreimal Sonne"}) = \mathrm{P}(\mathrm{S\,S\,S}) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{216}$$

Mit Hilfe der angegebenen Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P}(\text{"genau einmal Sonne"}) = \frac{17}{72}$ und $\mathrm{P}(\text{"genau zweimal Sonne"}) = \frac{11}{216}$ ergibt sich für den Erwartungswert E des Gewinns des Besitzers:

$$\mathrm{E} = 1\,€ - \left(1\,€\cdot\frac{17}{72} + 2\,€\cdot\frac{11}{216} + 3\,€\cdot\frac{1}{216}\right) = \frac{35}{54}\,€ \approx 0,65\,€$$

Der Besitzer erwartet langfristig im Mittel einen Gewinn von etwa $0,65$ € pro Spiel.

2.3.2 Die Wahrscheinlichkeit, genau einen Euro ausgezahlt zu bekommen, beträgt $p = \frac{17}{72}$.

Legt man X als Zufallsvariable für die Anzahl der Spieler, die genau einen Euro ausbezahlt bekommen, fest, so ist X binomialverteilt mit den Parametern $n = 140$ und $p = \frac{17}{72}$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als 30 aber weniger als 40 Spieler genau einen Euro ausbezahlt bekommen, erhält man mit Hilfe der kumulierten Binomialverteilung:

frv.tv/df

$$\mathrm{P}(30 < X < 40) = \mathrm{P}(X \leqslant 39) - \mathrm{P}(X \leqslant 30) \approx 0,8984 - 0,3102 = 0,5882$$

Die Frau des Besitzers hat mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $58,8\,\%$ recht.